

## LA TERCERA DIRECTRIZ: LA EQUI-DISTRIBUCIÓN. PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES REGLADAS EN LA ARQUITECTURA

### A THIRD GUIDELINE FOR A RULED SURFACE: THE EQUAL DISTRIBUTION

Isabel Crespo Cabillo, Genís Àvila Casademont

doi: 10.4995/ega.2016.4740

Algunas figuras estudiadas en la tesis doctoral "Control gráfico de formas y superficies de transición" son superficies que no se corresponden con ninguna forma geométrica estándar. Este artículo argumenta que la forma de la arquitectura viene condicionada por las leyes de la construcción material y genera nuevas figuras tan geométricas como las clasificadas en los libros y teorías.

**PALABRAS CLAVE: GEOMETRÍA  
CONSTRUCTIVA. DISEÑO  
ARQUITECTÓNICO. SUPERFICIES  
REGLADAS. DISEÑO PARAMÉTRICO**

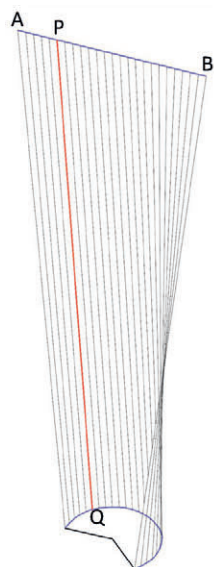
*The figures analyzed in the thesis "Graphic control surfaces and ruled transition forms" have a clear the use, in practice, of surface forms that do not correspond to any geometric figure listed. Geometric forms and in particular ruled surfaces, respond to mathematical approaches that relate the placement of a line moving along two guidelines following a law. This law can be either a third given guideline, a plan in which all lines are parallel to (Catalan surfaces) or a fixed inclination (cone director). This article argues that this third law can be the equal distribution of the straight lines along both guidelines, so that each straight line divides the guideline into two parts in equal proportion.*

**KEYWORDS: CONSTRUCTIVE GEOMETRY.  
ARCHITECTURAL DESIGN. RULED  
SURFACES. PARAMETRIC DESIGN**



RESUMEN GRÁFICO: NUEVAS SUPERFICIES REGLADAS. TRES CASOS DE ESTUDIO

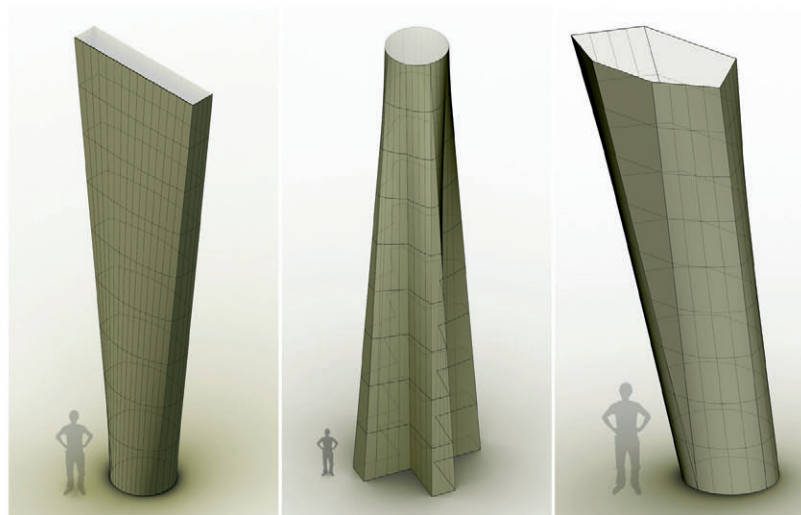
GRAPHICAL ABSTRACT: NEW RULED SURFACES. THREE STUDY-CASES



$$r(t,s) = (1-s) P(t) + s Q(t)$$

Cuando las figuras clásicas no satisfacen los requerimientos de la arquitectura, la construcción provee la solución, generando nuevas formas con sus propias leyes y tan geométricas como aquéllas

When the classic figures do not meet the requirements of architecture, construction provides the solution, creating new forms with their own laws and so geometric as those



Introducción

El estudio llevado a cabo por la investigación doctoral sobre formas de transición pone sobre la mesa una teoría de generación de superficies que no han sido aún incluidas en los libros de geometría. Esto no significa que la geometría no sirva para la comprensión y la concepción de la arquitectura i la ingeniería, pero esta ciencia aplicada deberá incorporar figuras que no tienen un apartado en los libros aun apareciendo en multitud de ocasiones. Este artículo se propone revisar algunos ejemplos estudiados en la tesis doctoral titulada “Control gráfico de formas y superficies de transición” leída en marzo de 2005, para encontrar las ecuaciones matemáticas que permitan trabajar estas figuras desde la analítica y consecuentemente a la parametrización en el modelado tridimensional de las mismas.

La tesis también explica que el objetivo de la geometría descriptiva no es sólo la habilidad para resolver intersecciones entre figuras, sino construir un pensamiento gráfico. De ahí el papel que juega en los programas formativos de arquitectos e ingenieros.

La investigación ha revelado que algunas soluciones constructivas corresponden a figuras sin nombre pero que son tan geométricas como las que sí lo tienen. Esto nos lleva a concluir que la geometría en la arquitectura está gobernada, como no podía ser de otro modo, por las leyes de la construcción material y ha evidenciado que cuando se diseña sin tenerlas en cuenta, aparecen todo tipo de problemas. (Crespo, 2005) 1. En cierto modo, si para Perret la construcción es la lengua materna de la arquitectura, la geometría viene a ser su gramática.

Introduction

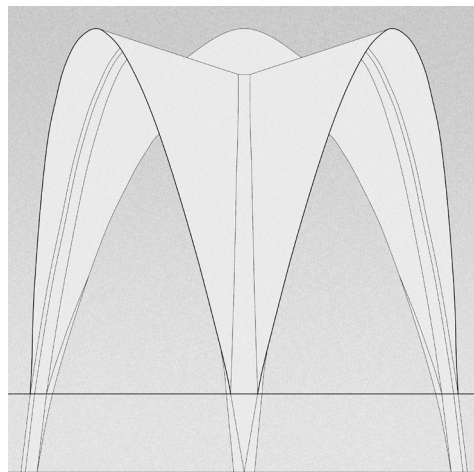
The study carried out in the doctoral research of transitional forms has put forward a theory to generate surfaces that have not been included in the books of descriptive geometry, so far. This does not mean that the descriptive geometry is not useful for the understanding and formal conception of the architecture and the engineering, but this applied science will have to incorporate in the list of constructive shapes some figures that don't have their own chapter although they appear in many occasions. This article aims at reviewing some studied examples in the doctoral thesis titled: “Control surface of transition and graphic forms” submitted in March 2005, to find mathematical expressions and make the analytical study to make incorporate these surfaces to those constructive geometry shapes that appear in technical books of engineering and architecture.

The thesis explains, as well, that the aim of graphic geometry is not just the ability to solve the intersections between forms, but to create a three-dimensional thinking. That's why it has such an important role in training programs of





1



2



3

the schools of architecture and engineering. The research has revealed that some constructive solutions correspond to unnamed figures, but they are however geometric. This issue makes us conclude that geometry of the architecture is governed, as it could not be otherwise, by the laws of material construction and when complex forms are designed without considering construction process all kind of problems have appeared (Crespo, 2005) 1.

### Three study-cases

We will have a look at the forms that have been conceived to be built in reinforced concrete, especially those cases that are thought to be seen, and have some inclined ruled faces with double curvature, and are not a paraboloid, a hyperboloid or a conoid, because these are known and they have an analytical expression and a place in the geometry books. The three examples chosen for this article are ruled surfaces with double curvature, generated between a circle and a straight line, both prefixed and horizontal. These two lines are defined as a consequence of a use or a structural behaviour, for example they have a clear continuity with the supporting shape. All of them have been designed by Pier Luigi Nervi and they are the column of the Palazzo del Lavoro in Torino, Italy (Fig. 1); the column of the not built Catholic Cathedral of New Norcia, in Perth, Australia (Fig. 2), and the column of the assemblies Hall of the UNESCO Headquarters in Paris, France (Fig. 3). The first one solves the changing surface between a cross shape basis and a circular crowning at 20 meters high; making the union between square pieces and isolated props was easy and rapid. The New Norcia prop is one of three feet that receive the weight of a

### Tres casos de estudio

Los tres ejemplos escogidos para este artículo son superficies regladas alabeadas, generadas entre un círculo y una recta prefijados y en posición horizontal. Estas dos líneas están determinadas por requisitos de la estructura y buscan por ejemplo la continuidad entre elementos de la forma portante. Todos fueron diseñados por Pier Luigi Nervi, y son: las columnas del Palazzo del Lavoro en Torino, Italia (Fig. 1); la columna de la Catedral Católica de Perth, Australia (Fig. 2), y la columna de la Sala de Asambleas de la sede de UNESCO en París, Francia (Fig. 3).

El primero resuelve una superficie cambiante entre una base en cruz y un coronamiento circular a 20 metros de altura, que debía unirse a las piezas de cubierta de forma cuadrada. La columna de New Norcia es uno de los tres pies que reciben la carga de una cubierta formada por tres láminas parabólicas de hormigón. Esta geometría triangular es la razón de que la forma del capitel de la columna sea un polígono hexagonal y la base un círculo que parece buscar la entrega puntual con el suelo. El tercer caso, la columna del edificio UNESCO en París, resuelve el cambio definido entre un techo plegado, con una clara dirección bien definida y de nuevo una base circular allí donde se requería una me-

nor obstrucción del espacio interior para la celebración de asambleas. En resumen, todos los casos requieren la construcción de una superficie entre un círculo y un segmento rectilíneo, una superficie de transición.

En los tres casos se construyen figuras que no corresponden a ninguna conocida con lo que no siempre son las formas estándar la respuesta adecuada a los requerimientos de la arquitectura (Delgado, 2000) 2, la geometría de la arquitectura no está en los catálogos, del mismo modo que las soluciones en la arquitectura en piedra eran respuestas a situaciones y requerimientos de la estabilidad y la función que la estereotomía se debió ocupar de resolver con figuras particulares (Rabasa, 1994) 3.

### La cuestión geométrica

Las superficies regladas de Catalan 4 podían haber sido una solución para estos casos. Pero aquí no lo son, tal como se explica en las conclusiones de la tesis, la solución ha sido forzada por los requerimientos de la ejecución material: las generatrices de las tres superficies regladas son distribuidas a lo largo de cada directriz de tal modo que dividen los respectivos segmentos de las directrices en partes de igual proporción. De este modo las columnas ofrecen conti-



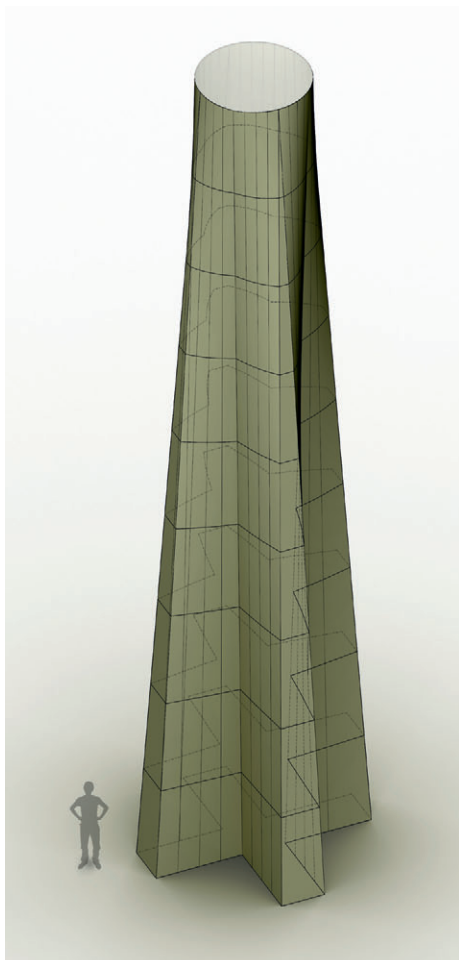
nidad a pesar de la sección variable de su forma. Esta continuidad ayuda al armado del hormigón a un mejor control de su comportamiento, pero aún más trascendente es que se consigue dar apariencia de continuidad a la piel desnuda de las columnas, que se muestran sin recubrimiento ni protección, enseñando así la huella del encofrado que les ha dado forma, como se hacía en los años cincuenta del siglo xx **5**. Por ello la mayoría de casos estudiados en la tesis se han encontrado entre los ejemplos de arquitectura de hormigón del siglo veinte. (Figs. 4, 5 y 6).

### Representación diédrica

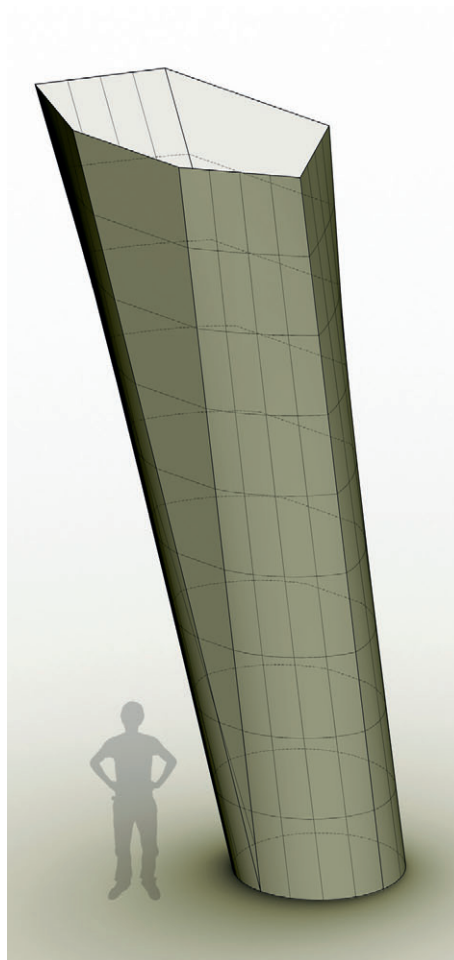
Los dibujos técnicos de los proyectos han ayudado a afirmar estas tesis puesto que expresan con claridad los criterios de configuración de las superficies regladas. En el caso de Turín, un sencillo dibujo de planta y alzado sintetiza el planteamiento geométrico y la distribución de la familia de rectas generatrices. La planta determina unívocamente la figura con un solo dibujo con información numérica. (Fig. 7)

En New Norcia es de nuevo un dibujo lo que resume la estrategia constructiva, como en los otros dos

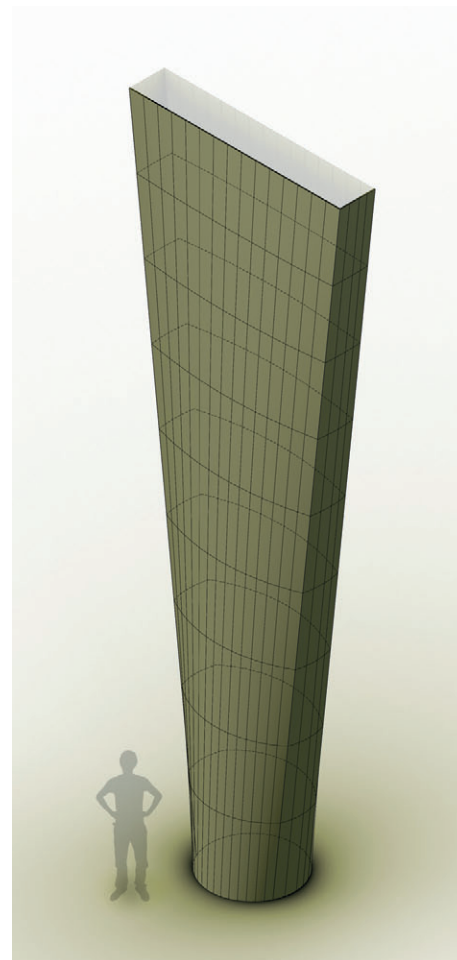
cover of three parabolic sheets. This triangular geometry is the reason why the top of the column has a polygonal shape. The bottom ends the form in a circle as it is looking for a punctual ending. The third case, the prop of the UNESCO building solves a change between the folding ceiling with a clear sense of direction and again a circular bottom, where they want less obstruction as possible for the assemblies is required. Summarizing, all of them make it necessary to construct a surface between a circle segment and a straight line segment, a transition surface. These three cases show that classic forms are not always the convenient answer to architectural needs (Delgado, 2000) **2**, that's way we should know the good forms as well as classic ones. (Rabasa, 1994) **3**.



4



5



6



## The geometric topic

Catalan 4 ruled surfaces could have been proposed as a solution for these cases. But they have not. Here, as it is explained in the thesis as conclusions, the solution has been forced by the requirements of the material execution: the straight lines of the three ruled surfaces are delivered along each guideline in such a way that divides the length of each guideline in equal proportional parts. By this method the prop are continuous despite the changing section of its shaft. As a consequence, the columns seem to be continuous in spite of their variable section. This continuity helps the iron reinforcement and the structural behaviour to be better controlled. But most important, they achieve to give a smooth and continuous look on the naked skin of the columns that are displayed, without any cover or protection, in order to show the footprints of the moulds that had formed them, the way it was in the fifties. That's why most of the studied cases of the doctoral research have been found among the reinforced concrete architecture of the twentieth century 5. (Figs. 4, 5 and 6).

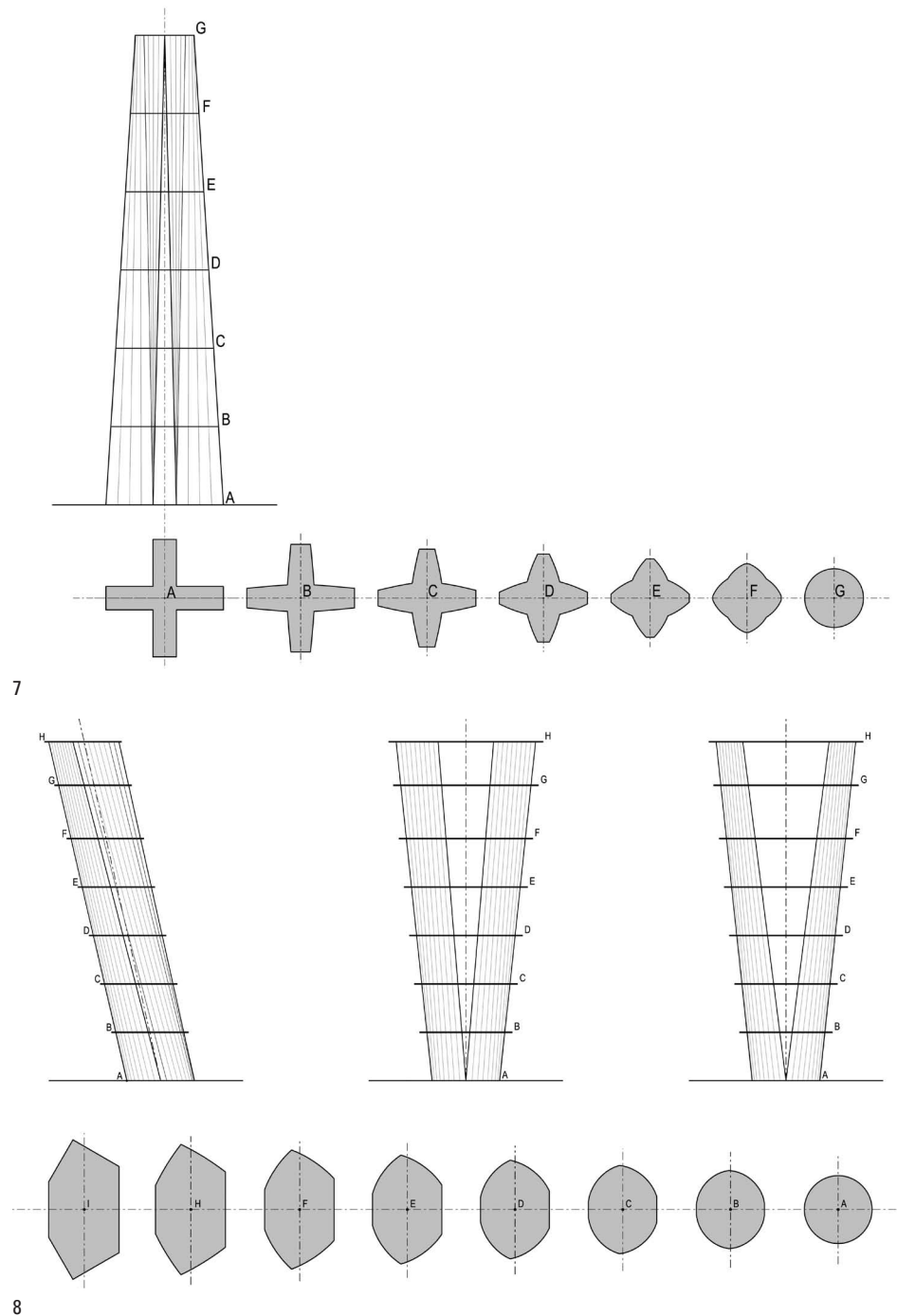
## Diedric representation

The technical drawings of the projects have also helped to affirm these theses as they express clearly what has been the criterion of the layout of ruled surfaces has been. In Turin, a single drawing of the floor and lifted synthesizes constructive approach and readiness of the family of lines. The plan defines the entire figure, a single drawing with numeric information. (Fig 7)

At New Norcia is again a drawing that summarizes the constructive strategy, as the other two cases, a piece is resolved and explained for its portions, the same parts that are needed to be constructed, as you can see on the plans and the photographs. (Fig. 8)

Another contribution is to reaffirm the idea that the diedric system of representation is the most effective to solve complex form problems. In all cases that have been studied in the doctoral thesis I found the plant is the most effective drawing tool for solving problems of geometry. And this is true before and after the use of CAD systems.

We can believe that new technologies could have shifted the Diedric representation system,



ejemplos, una columna se resuelve y se explica por sus porciones, los mismos fragmentos que se necesitan para la construcción, como se puede ver en los dibujos y en las imágenes. (Fig. 8)

Otra contribución es reafirmar la idea de que el sistema diédrico de representación es el más efectivo para trabajar problemas complejos de forma. En todos los casos, la planta es la mejor herramienta gráfica para solucionar problemas de geometría.

Podríamos pensar que las nuevas tecnologías desplazarían el sistema diédrico de representación por la gran facilidad en construir modelos tridimensionales. Nada más lejos de la realidad, la proyección cilíndrica es la mejor herramienta de abstracción ya que permite vistas sintéticas donde reconducir los temas geométricos al terreno de la abstracción. El hecho de disponer con facilidad del modelo tridimensional no supone





prescindir de su uso para estudiar temas geométricos 6.

Si atendemos al aspecto geométrico, vemos en los tres casos un círculo horizontal y un segmento recto también horizontal. Esta horizontalidad puede simplificar la aproximación matemática, pero debemos tener en cuenta que esa es una condición particular. Aunque en arquitectura esta posición es muy frecuente, casi una situación natural de los elementos, tan natural como la posición vertical.

### Superficie reglada

Si planteamos una ecuación paramétrica para la reglada (Fig. 9):

$$r(t,s) = (1-s) P(t) + s Q(t)$$

Donde  $t$  y  $s$  son los parámetros y  $P(t)$  y  $Q(t)$  las ecuaciones paramétricas de las directrices.

Si tomamos  $P(t)$  como el segmento recto entre dos puntos  $A(x_a, y_a, z_a)$  y  $B(x_b, y_b, z_b)$  que, al ser horizontal, resulta que  $z_a = z_b = z_p$ , por lo que la expresión matemática es:

$$P(t) = (1-t) A + t B = [(1-t) x_a + t x_b, (1-t) y_a + t y_b, z_p]$$

donde  $0 \leq t \leq 1$

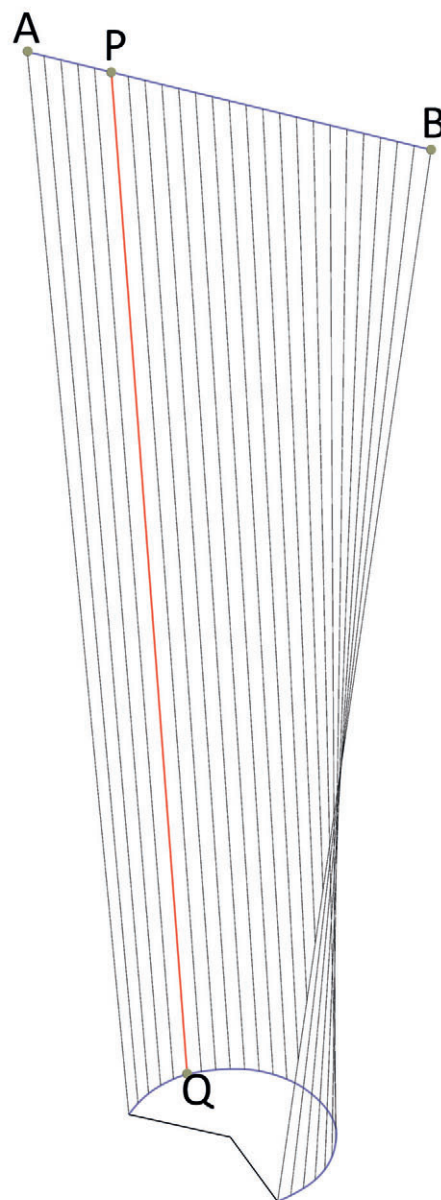
La otra directriz  $Q(t)$  es un arco horizontal que depende del mismo parámetro  $t$ . La ecuación de un arco de circunferencia con la  $z$  constante es:

$$Q(\alpha) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha, z)$$

donde  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Vamos a considerar que la circunferencia tiene el centro en el eje  $Z$ , por lo tanto su  $x=y=0$  y su valor  $z$  es constante.

Ahora podemos determinar la correspondencia entre cada valor de  $t$  en el segmento recto y cada valor  $\alpha$  del arco. Cosa que equivale a decir qué par de puntos de cada una de las directrices quedan unidos por cada recta generatriz.



9

### La tercera directriz: "la tercera ley"

Éste es el punto clave de este estudio: haber encontrado que la solución de estos tres casos ha sido la misma, la igual distribución de generatrices en una y otra directriz de tal modo que cada extremo de una misma recta divide las directrices en segmentos de igual proporción. Si traducimos esta idea a la construcción la superficie construida es el resultado de apoyar el listonado del encofrado en igual número sobre una directriz y otra i de manera equidistante en cada una.

because it is very so easy to generate 3D models. Nothing further from reality, the cylindrical projection gives us the best tool to think the geometry in an abstract way, its synthetic view made us consider the particular case as a general case, to which we can relate any other particular example 6.

If we look at the geometric issue we have, in the three cases, a horizontal circle and a horizontal straight line. A circle or a straight line segment both in horizontal position, can simplify the approach to the equations of the surface but we must know these as particular conditions. In architecture, it is very common that the constructive elements have a horizontal position due to the conditions imposed by the force of gravity and the challenge of overcoming it with a more or less ingenious construction. This is the reason for the recurrent way to describe these three examples as well. They are all are drawn by its transverse horizontal sections that correspond with the process of construction, as we can see in figures 7, 8 as drawings that show the variable section and 9 where the body of the column shows the signal of these sections, which are the union joints.

### Ruled surface

If we propose a parametric equation for a ruled surface, it is (Fig. 9):

$$r(t,s) = (1-s) P(t) + s Q(t)$$

Where  $t$  and  $s$  are the parameters and  $P(t)$  and  $Q(t)$  the parametric equations of the guidelines.

If we consider  $P(t)$  as the straight line segment between two points  $A(x_a, y_a, z_a)$  and  $B(x_b, y_b, z_b)$  and being because it is horizontal we consider  $z_a = z_b = z_p$ . The mathematical expression is:

$$P(t) = (1-t) A + t B = [(1-t) x_a + t x_b, (1-t) y_a + t y_b, z_p]$$

where  $0 \leq t \leq 1$

The other guideline  $Q(t)$  is a horizontal arc that must be depending of the same parameter  $t$ . The expression of a circle arc with a fixed  $z$  is:

$$Q(\alpha) = (a \cos \alpha, a \sin \alpha, z)$$

Where  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Here we consider that the circle has its centre on the  $Z$  axis, so its  $x=y=0$  and its  $z$  value is fixed.

At this point, we can determine the dependence between each  $t$  value, of the segment, and each value of the arc. This is the same as to know which pair of points, one from each guideline, belongs to the same straight line of the ruled surface.



## A third guideline a “third law”

The key point of this research is to have found that the solution for these cases has been the same: the equal distribution of the ruled surface from one guideline to the other in such a way that each couple of points of the same straight line divides both guidelines in equal proportions. If we translate this idea to the construction we must give the equidistant distribution of the pieces lines forming the formwork along the two preformed endings.

In order to find the mathematical expression we need to bind one parameter to the other, the linear parameter  $t$  to the angular parameter  $\alpha$ . We know that a rule surface is generated by the movement of a straight line moving along to lines, its guidelines, following a certain law; this law can be to be parallel to a plane or to a con. But what we propose here is that this third law links the couple of points that divide each guideline in equal proportional segments. So if the  $t$  value goes from 0 to 1, the angle parameter must go proportionally from 0 to 1 as well. In such a way that the location for the first straight line of the ruled surface corresponds to the value 0, and the location for the last one corresponds to the 1 value.

For example, if the arc goes from the  $0^\circ$  to  $90^\circ$ , the parameter  $\alpha$  is related to the total sweeping arc  $\pi/2 - 0$ , as the parameter  $t$  is to 1. That means that:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \cdot t$$

Now we can replace the angular parameter in the  $Q(t)$  and lead it only depending on the parameter  $t$

$$Q(t) = [a \cos \alpha_0 + \Delta\alpha t, a \sin (\alpha_0 + \Delta\alpha t)], z_q$$

So we can go to the first expression for that ruled surface

$$r(t,s) = (1-s)P(t) + sQ(t)$$

And now we can write the formula depending on parameter  $t$

$$r(t,s) = (1-s)[(1-t) x_a + t x_b, (1-t) y_a + t y_b, z_p] + s[a \cos \alpha_0 + \Delta\alpha t, a \sin (\alpha_0 + \Delta\alpha t), z_q]$$

Where  $0 \leq t \leq 1$  and  $0 \leq s \leq 1$ ;  $\Delta\alpha$  is the circle angle and coordinates  $z_p$  and  $z_q$  are the values for the respective horizontal planes where the two guidelines belong.

If we separate the three coordinates  $X$ ,  $Y$  and  $Z$  we have:

En el dibujo la idea se consigue dividiendo en el mismo número de partes cada segmento directriz.

Con objeto de hallar una expresión matemática debemos pues vincular un parámetro al otro, el parámetro lineal  $t$  al parámetro angular  $\alpha$ . Sabemos que una superficie reglada se genera por el movimiento de una recta sobre otras dos líneas siguiendo cierta ley; esta ley puede ser un plano al que todas las rectas son paralelas o un cono a alguna de las generatrices del cual las rectas son paralelas. Pero lo que aquí se propone es que esa tercera ley relaciona dos puntos de cada generatriz que dividen la longitud de esta en igual proporción.

Así si el valor  $t$  va de 0 a 1, el ángulo ha de ir proporcionalmente de 0 a 1, de manera que la situación de la primera generatriz une los puntos de valor  $t=0$  y la última generatriz une los puntos cuyo valor  $t$  es 1 en ambos segmentos directriz.

Si el arco va de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , el parámetro  $\alpha$  va de 0 a  $\pi/2$ , tanto como el parámetro  $t$  va de 0 a 1. Lo que significa que

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \cdot t$$

Ahora podemos sustituir el parámetro angular en  $Q(t)$  y dejar todo en función del parámetro  $t$

$$Q(t) = [a \cos \alpha_0 + \Delta\alpha t, a \sin (\alpha_0 + \Delta\alpha t)], z_q$$

Volviendo a la expresión inicial para las superficies regladas

$$r(t,s) = (1-s)P(t) + sQ(t)$$

y expresar la ecuación en función de  $t$  y  $s$

$$r(t,s) = (1-s)[(1-t) x_a + t x_b, (1-t) y_a + t y_b, z_p] + s[a \cos \alpha_0 + \Delta\alpha t, a \sin (\alpha_0 + \Delta\alpha t), z_q]$$

Donde  $0 \leq t \leq 1$  y  $0 \leq s \leq 1$ ;  $\Delta\alpha$  es el ángulo del arco de circunferencia y las

coordenadas  $z_p$  y  $z_q$  son los valores de los respectivos planos horizontales en los cuales están las dos directrices.

Separando las tres coordenadas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  tenemos:

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)x_a + (1-s)t x_b + s a \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha t) \\ y = (1-s)(1-t)y_a + (1-s)t y_b + s a \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha t) \\ z = (1-s)z_p + s z_q \end{cases}$$

Donde:  $\Delta\alpha$  es el ángulo de barrido  
 $0 \leq t \leq 1$  ;  $0 \leq s \leq 1$   
 y  $a$  es el radio del círculo

Podemos ver que el valor de  $Z$  sólo depende del parámetro  $s$  y no de  $t$ . Los extremos de la directriz rectilínea son  $A=(x_a, y_a, z_p)$  y  $B=(x_b, y_b, z_p)$ .

## Aplicación a los tres ejemplos:

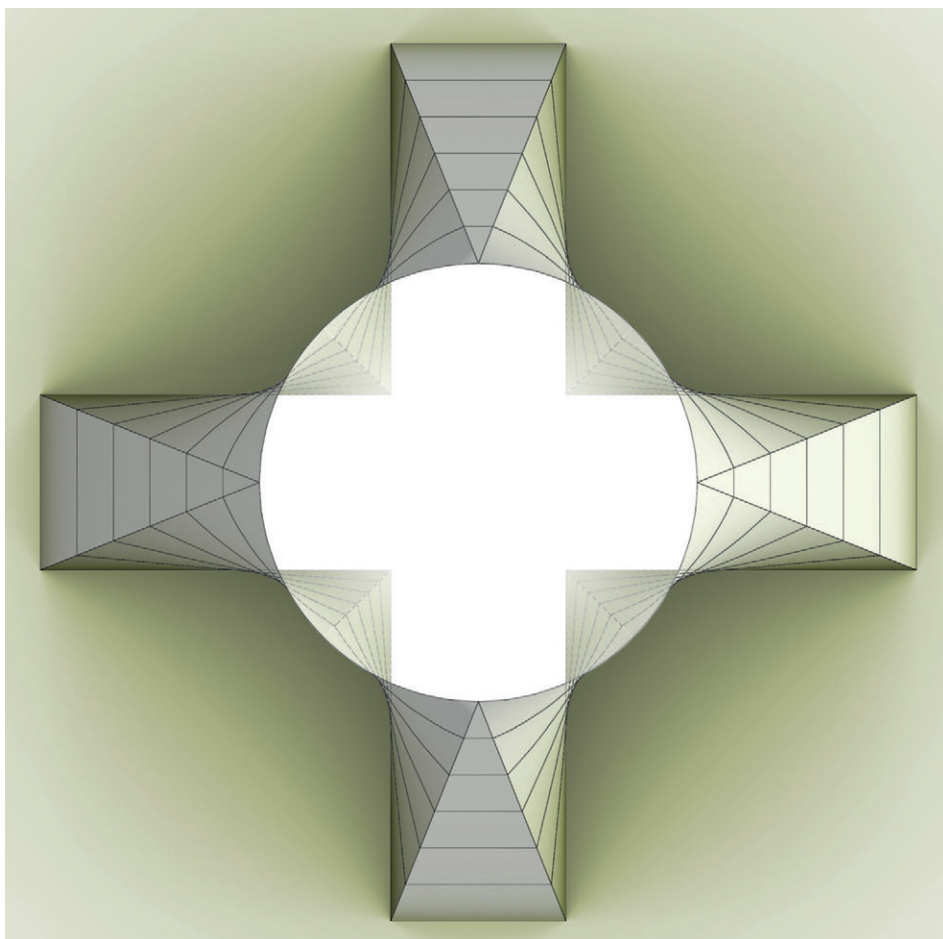
*El caso de Turín* (Figs. 10, 11 y 12)

Aquí la directriz superior es la curva  $Q(t)$ , en el plano  $Z=20$  y barre un ángulo de 0 a  $\pi/4$ , y la directriz inferior es recta, en el plano  $Z=0$  y los extremos del segmento son  $A(2.5, 0.5, 0)$  a  $B(0.5, 0.5, 0)$ . El radio de la circunferencia es 2.5.

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)2.5 + (1-s)t0.5 + s2.5 \cos \left(0 + \frac{\pi}{2} t\right) \\ y = (1-s)(1-t)0.5 + (1-s)t0.5 + s2.5 \sin \left(0 + \frac{\pi}{2} t\right) \\ z = (1-s)0 + s20 \end{cases}$$

$$r(t,s) \begin{cases} x = 2.5(1-s)(1-t) + 0.5t(1-s) + 2.5 s \cos \left(\frac{\pi}{2} t\right) \\ y = 0.5(1-s)(1-t) + 0.5t(1-s) + 2.5 s \sin \left(\frac{\pi}{2} t\right) \\ z = 20 s \end{cases}$$

Donde:  $0 \leq t \leq 1$  ;  $0 \leq s \leq 1$



10

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)x_a + (1-s)t x_b + s a \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha t) \\ y = (1-s)(1-t)y_a + (1-s)t y_b + s a \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha t) \\ z = (1-s)z_p + s z_q \end{cases}$$

where:  $\Delta\alpha$  is the sweeping arc

$$0 \leq t \leq 1 ; 0 \leq s \leq 1$$

And  $a$  is the circle's radius

So we can see that in these cases the  $Z$  coordinate only depends on the  $s$  parameter, and not on  $t$ . The ending points of the straight guideline are  $A=(x_a, y_a, z_p)$  i  $B=(x_b, y_b, z_p)$ .

### Applying to the three examples:

#### Torino case (Figs.10, 11 and 12)

Here the curved guideline  $Q(t)$  is at the top in  $Z=20$  plane and the straight guideline  $P(t)$  on the bottom, equally so on the plane  $z=0$ . The  $AB$  segment goes from  $A(2'5, 0'5)$  to  $B(0'5, 0'5)$  and the top curve guideline sweeps the arc from  $0^\circ$  to  $45^\circ$ , so it goes from  $0$  to  $\pi/4$ . The radius length for the circle  $a$  is  $2'5$ .

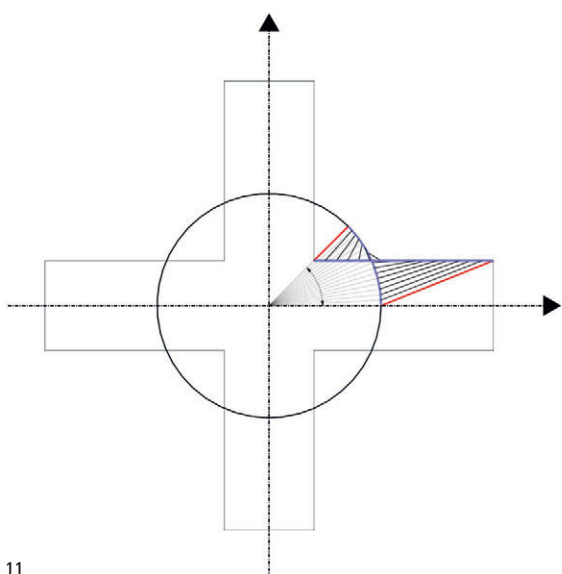
$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)2.5 + (1-s)t0.5 + s2.5 \cos(0 + \frac{\pi}{2}t) \\ y = (1-s)(1-t)0.5 + (1-s)t0.5 + s2.5 \sin(0 + \frac{\pi}{2}t) \\ z = (1-s)0 + s20 \end{cases}$$

$$r(t,s) \begin{cases} x = 2.5(1-s)(1-t) + 0.5t(1-s) + 2.5s \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y = 0.5(1-s)(1-t) + 0.5t(1-s) + 2.5s \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ z = 20s \end{cases}$$

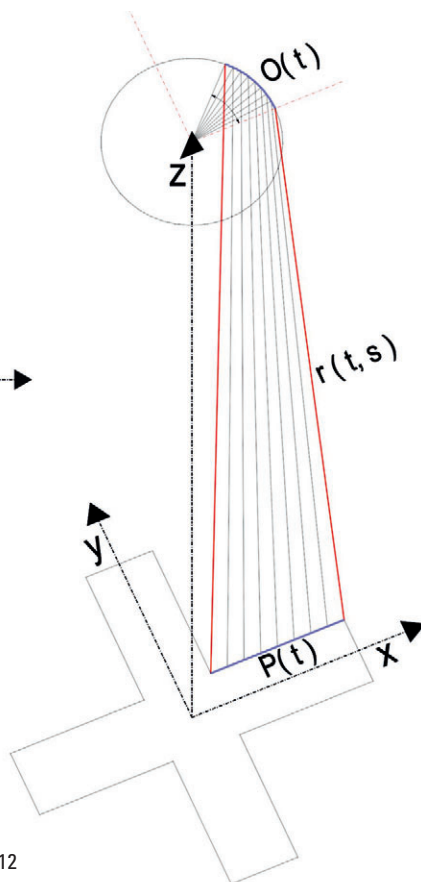
where:  $0 \leq t \leq 1 ; 0 \leq s \leq 1$

#### New Norcia case (Figs.13 and 14)

Here we have four ruled surfaces with the curved guideline on the basis( $z=0$ ) and the straight at the top. We choose for the study case the first quarter of circle, so the straight segment goes from  $A(-0'863, 0'891, 7)$  to  $B(-1'815, 1'441, 7)$ , the sweep arc is from  $0$  to  $\pi/2$ , the radius of the circle is  $a=0'7$ , and the plane for the top guideline is  $z=7$ . So we can express de formulae for one of the surfaces:



11



12





$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(-0.863) + (1-s) \\ t(-1.815) + s0.7 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)0.891 + (1-s) \\ t1.441 + s0.7 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ z = (1-s)7 + s7 \end{cases}$$

where:  $0 \leq t \leq 1$ ;  $0 \leq s \leq 1$

For the other ruled surface,  $A=(-1'815, 1'441, 7)$ ,  $B=(-2'315, 0'575, 7)$  to, the arc goes from  $\pi/2$  to  $\pi$  and the radius and the high for the top guideline are the same as were before so.

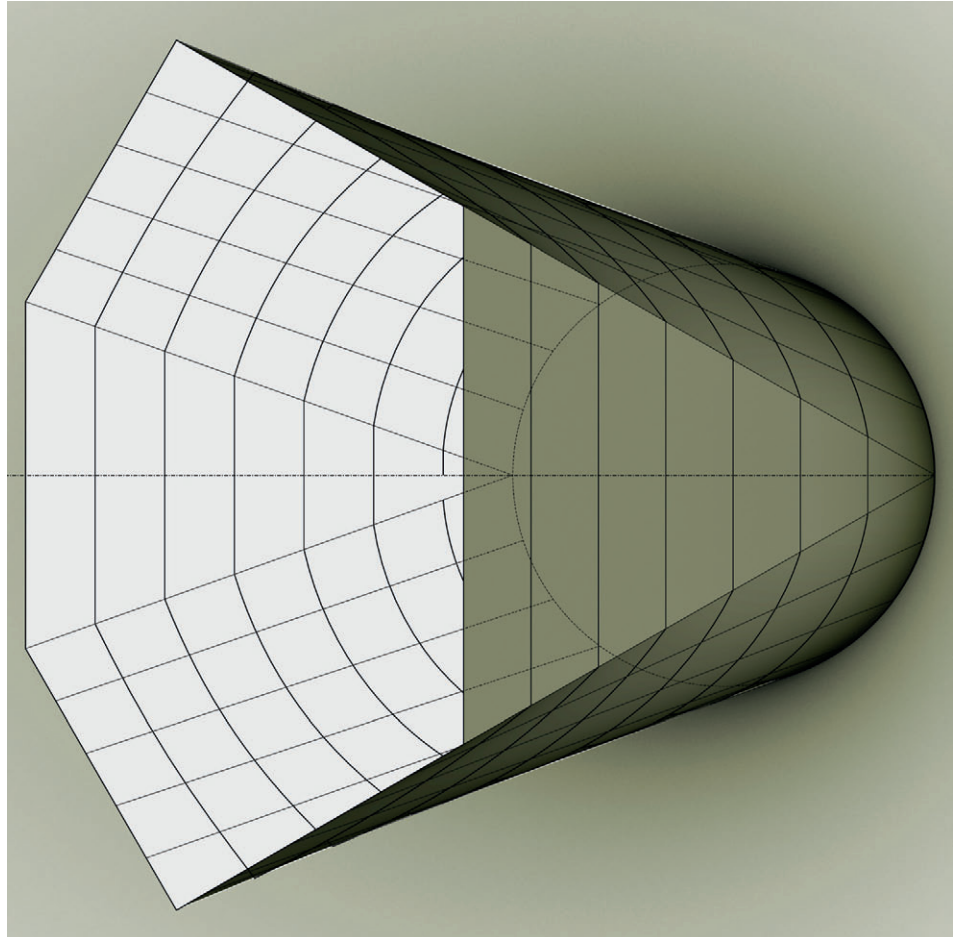
$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(-1.815) + (1-s) \\ t(-2.315) + s0.7 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)(1.441) + (1-s) \\ t0.575 + s0.7 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right) \\ z = (1-s)7 + s7 \end{cases}$$

where:  $0 \leq t \leq 1$ ;  $0 \leq s \leq 1$

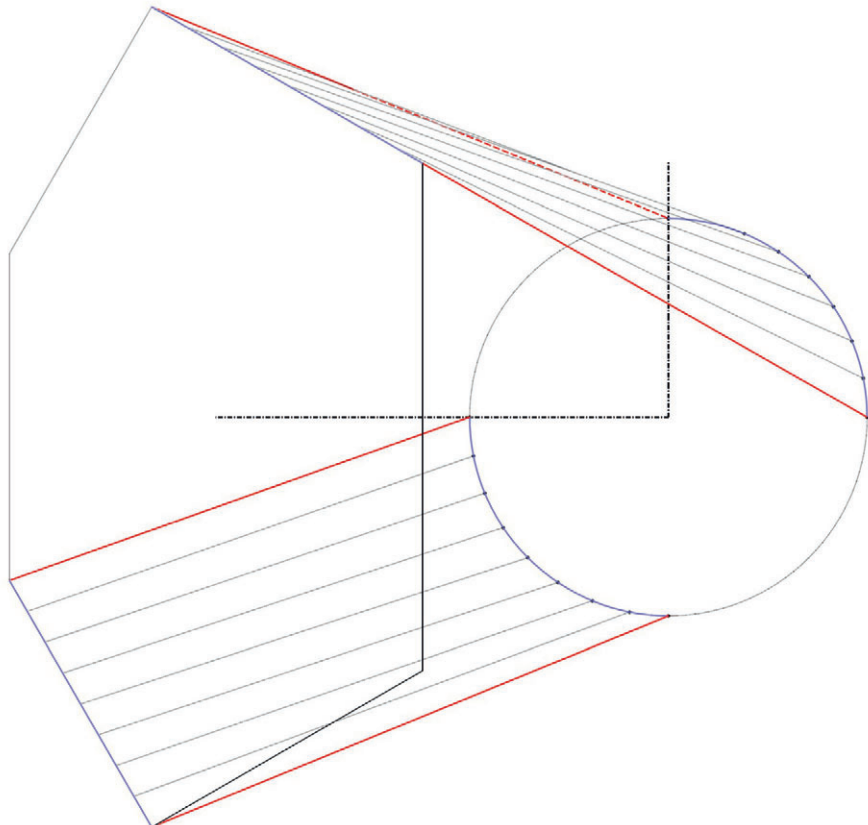
*For the UNESCO case* (Figs. 15 and 16)

First of all we must define the way of relating the top guideline to the low one. How the straight lines of the ruled surface between the circumference and the rectangle are arranged. If we want to obtain a continuous surface the better solution is to make correspond proportional lengths of each guideline, so from a quarter of the circle a number of straight lines are distributed to a quarter of rectangle in such a way that all straight lines divide each quarter guideline in two proportional lengths.

The rectangle has a ratio of 1:6, so if we want to work with a quarter of the circle we could divide the total circumference in 14 segments but, in order to connect the midpoint of each side of the rectangle with the four quarters of the circle, we should divide in a double number of segments. So we consider 28 parts for the bottom rectangle, seven of those for each  $\pi/2$  of the top circle. So we will have two ruled surfaces: one from a half short-side to a 28<sup>th</sup> part of circle and another from a half long-side of the rectangle to the six 28<sup>th</sup> parts, or three fourteenth parts, of the circumference. Now we can express the formulae. For the first segment is  $A=(3,0,9)$   $B=(3,0'5,9)$  and the second one  $A=(3,0'5,9)$   $B=(0,0'5,9)$ , the height is 9 and the radius is 0'60. The sweep angle goes from 0 to  $\pi/14$  for the first and from this to  $\pi/2$  from the second.



13



14



**El caso de New Norcia** (Figs. 13 y 14)

Aquí tenemos cuatro superficies regladas con la directriz curva en la base en el plano  $Z=0$  y la recta en la parte superior. Escogemos para el ejemplo el primer cuarto de circunferencia por lo que el segmento recto AB en el plano  $Z=7$ , va de A (-0'863, 0'891, 7) a B (-1'815, 1'441, 7); el ángulo barrido por el arco va de  $0$  a  $\pi/2$ , y el radio de la circunferencia es  $a=0'7$ . De manera que la expresión de una de las caras alabeadas es:

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(-0.863) + (1-s)t(-1.815) + s0.7 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)0.891 + (1-s)t1.441 + s0.7 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ z = (1-s)7 + s7 \end{cases}$$

Donde:  $0 \leq t \leq 1$  ;  $0 \leq s \leq 1$

Para la otra superficie reglada los datos son A=(-1'815, 1'441, 7), B=(-2'315, 0'575, 7), el arco va de  $\pi/2$  a  $\pi$  y el radio de la circunferencia y la altura de la directriz superior son los mismos.

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(-1.815) + (1-s)t(-2.315) + s0.7 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)(1.441) + (1-s)t0.575 + s0.7 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right) \\ z = (1-s)7 + s7 \end{cases}$$

Donde:  $0 \leq t \leq 1$  ;  $0 \leq s \leq 1$

**Para el caso UNESCO** (Figs. 15 y 16)

En este caso hay que definir en qué modo se relaciona el segmento de la directriz recta superior con la curva inferior. Con objeto de conseguir una superficie continua la mejor estrategia es establecer segmentos de proporciones

equivalentes en cada una de las directrices, para distribuir adecuadamente las generatrices que las unen; por lo tanto, dado que el rectángulo superior es de una proporción de 1 a 6, se divide su perímetro en 14 partes de modo que a cada segmento recto le corresponda la misma longitud de circunferencia de la base, ésta se divide en 14 partes iguales, además para que se mantenga un plano de simetría, y al ángulo  $0$  la corresponda el punto medio del lado del rectángulo se dividen ambas directrices en 28 partes, siete para cada cuarto de circunferencia inferior.

Por lo que tendremos dos superficies regladas: una desde medio lado menor a  $1/28$  del arco inferior y otra de medio lado mayor del rectángulo a  $6/28$  partes del arco. Con esto podemos expresar la fórmula. Para el primer segmento A=(3,0.9) B=(3,0.5,9) y para el segundo A=(3,0.5,9) B=(0,0.5,9), la altura es por tanto de  $z=9$  y el radio del arco es 0.60. El arco barrido va de  $0$  a  $\pi/14$  para el primer tramo y de ese punto hasta  $\pi/2$  para el segundo.

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(3) + (1-s)t(3) + s0.6 \cos\left(0 + \frac{\pi}{14}t\right) = 3(1-s)(1-t) + \left(\frac{3}{1-s}\right)t + 0.6s \cos\left(\frac{\pi}{14}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)0 + (1-s)t0.5 + s0.6 \sin\left(0 + \frac{\pi}{14}t\right) = 0.5(1-s)t + 0.6s \sin\left(\frac{\pi}{14}t\right) \\ z = (1-s)9 + s9 = 9 \end{cases}$$

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(3) + (1-s)t0 + s0.6 \cos\left(\frac{\pi}{14} + \frac{6\pi}{14}t\right) = 3(1-s)(1-t) + 0.6s \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)0.5 + (1-s)t0.5 + s0.6 \sin\left(\frac{\pi}{14} + \frac{6\pi}{14}t\right) \\ z = (1-s)9 + s9 = 9 \end{cases}$$

Donde:  $0 \leq t \leq 1$  ;  $0 \leq s \leq 1$

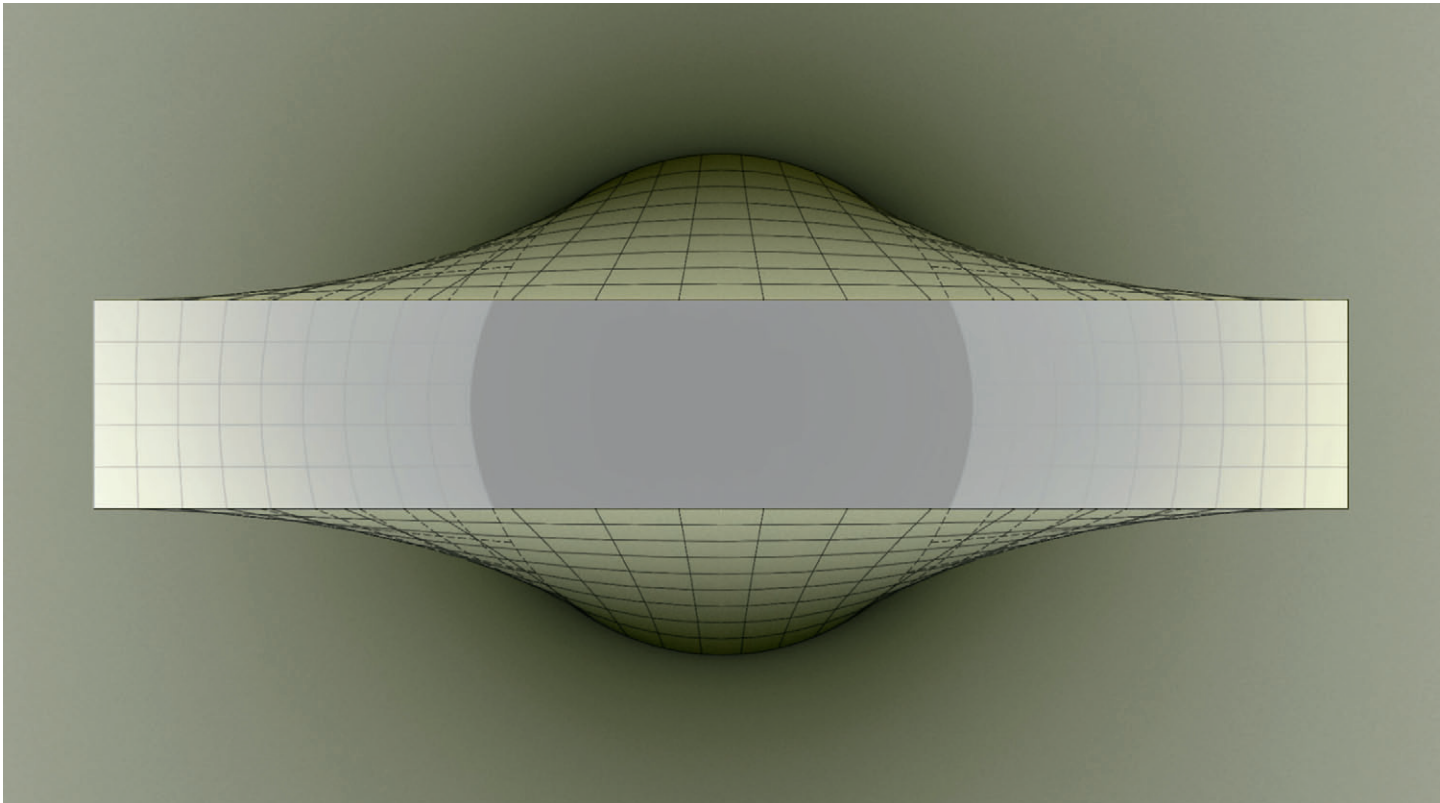
$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(3) + (1-s)t(3) + s0.6 \cos\left(0 + \frac{\pi}{14}t\right) = 3(1-s)(1-t) + \left(\frac{3}{1-s}\right)t + 0.6s \cos\left(\frac{\pi}{14}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)0 + (1-s)t0.5 + s0.6 \sin\left(0 + \frac{\pi}{14}t\right) = 0.5(1-s)t + 0.6s \sin\left(\frac{\pi}{14}t\right) \\ z = (1-s)9 + s9 = 9 \end{cases}$$

$$r(t,s) \begin{cases} x = (1-s)(1-t)(3) + (1-s)t0 + s0.6 \cos\left(\frac{\pi}{14} + \frac{6\pi}{14}t\right) = 3(1-s)(1-t) + 0.6s \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = (1-s)(1-t)0.5 + (1-s)t0.5 + s0.6 \sin\left(\frac{\pi}{14} + \frac{6\pi}{14}t\right) \\ z = (1-s)9 + s9 = 9 \end{cases}$$

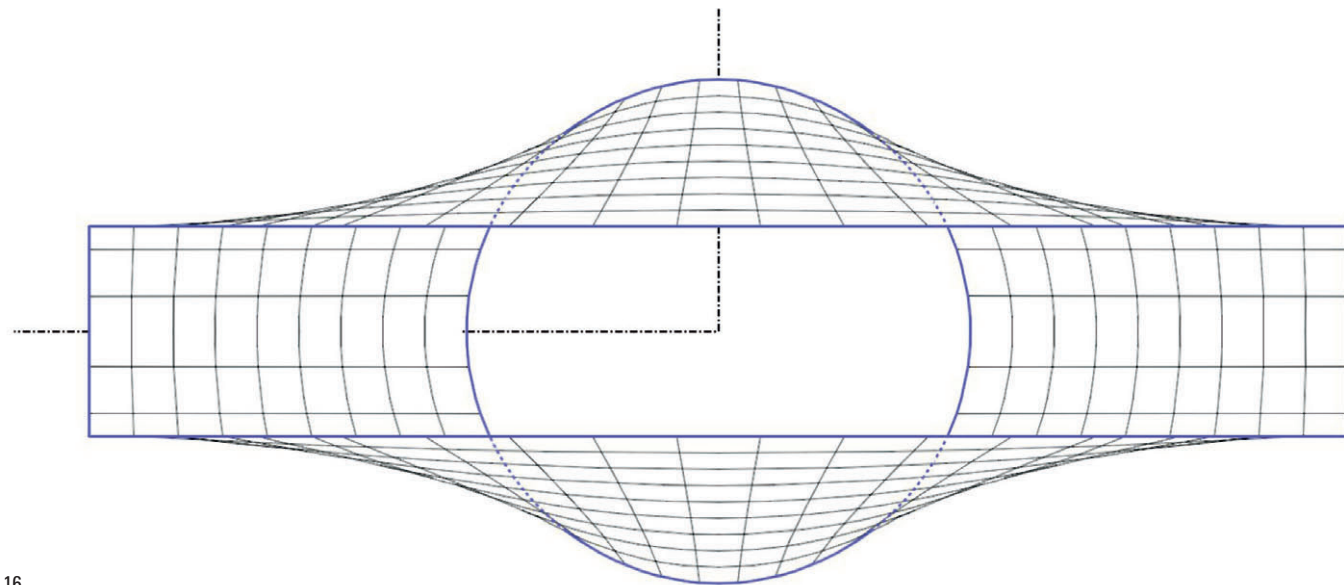
where:  $0 \leq t \leq 1$  ;  $0 \leq s \leq 1$

**Conclusion**

The main goal of this text is to make evident that the relationship between theory and practice, if we talk about geometry, is located inside the construction rules. In other words the constructive process shows the path to geometry to be architectonic, and the architecture is geometric because it must be built. So when we find a special form for a surface or a volume, we must search inside the constructive rules to define the exact form we are working with. Concrete forms of the fifth' years in the twentieth century, needed the geometry of the ruled surfaces to be made. Those soft forms, which seemed to bring us the strength of the stone domesticated for the culture, used the laws of the formwork to be controlled. They seemed to be random shapes or hand making skins but they were though in a real geometric way, at least as real or as geometrical as the standard forms that you can find in the mathematic books. Again building geometry and theoretical geometry meet them and help one each other, as has usually happened along the history of the architecture. If these studied cases had been solved as ruled surfaces between two straight guidelines segments, they would have been hyperbolic paraboloid in all cases. This geometric form appears in many cases and



15



16

acts in a similar way to the examples we have explained here and its mathematical expression is very simple. The cases studied present in the same rank other solutions with less simple formula but constructively the same roll. In our opinion we must consider these forms in the same terms that those and, why not, give them a name for this equi-proportional ruled surface.

### Conclusiones

El principal logro de este trabajo es hacer evidente que en arquitectura la relación entre teoría y práctica, en lo que a geometría se refiere, está en las leyes de la construcción. Dicho de otro modo, el proceso cons-

tructivo muestra el camino para que la geometría sea arquitectónica, y que la arquitectura es geométrica en tanto que debe ser construida. Por lo tanto cuando vemos una forma especial para una superficie o un volumen, debemos buscar en el sistema de construcción las leyes





que definen la forma exacta que tenemos entre manos.

Si estos casos analizados hubieran sido planteados como superficies regladas entre dos segmentos rectilíneos, las superficies que habrían resultado serían paraboloides hiperbólicos en todos los casos. Esta forma geométrica aparece en muchas ocasiones y su expresión matemática es conocida y simple. Los casos estudiados presentan soluciones diferentes cuyas fórmulas matemáticas no son tan sencillas pero que constructivamente son análogas. Por lo que, según nuestra opinión deberíamos tratar estas superficies en los mismos términos en que consideramos aquéllas y, por qué no, dotar a éstas de un nombre que las identificara como superficies regladas equi-proporcionales.

Las formas de hormigón de los años 50 del siglo veinte necesitaron la geometría de las superficies regladas para ser construidas. Aquéllas formas blandas, que parecían ofrecernos la fuerza de la piedra domesticada por la cultura, usaban las leyes del encofrado para ser controladas. Parecían ser figuras casuales o pieles modeladas con las manos pero fueron pensadas de un modo estrictamente geométrico, tan geométrico como las formas simples de las figuras estándares que podemos encontrar en los libros de matemáticas. De nuevo la geometría práctica y la geometría teórica se encuentran y se ayudan una a otra como ha ocurrido en tantas otras ocasiones de la historia de la arquitectura.

El trabajo pone otra vez sobre la mesa la relación entre ciencia y práctica, y constata un punto de encuentro en la parametrización del diseño y la construcción real. Cuando los constructores de catedrales góticas usaban reglas geométricas no conocían la base

matemática en la que éstas se sustentaban **7**. En diferentes momentos de la historia la aplicación de leyes geométricas se ha basado o bien en la experiencia empírica o en la aplicación de deducciones matemáticas. Este artículo busca definir una formulación matemática para formas que provienen de la práctica y cuya definición física es consecuencia de la construcción del molde para una superficie que debe ser hecha de hormigón armado. La igual proporción en el reparto de las generatrices es la clave que define la tercera ley de generación de las superficies regladas. Con este trabajo se pone en el foco de atención que el estudio en profundidad de las formas en la arquitectura se debe fundamentar en sus cualidades constructivas y abre la puerta a que se aplique la abstracción de la geometría analítica al estudio de formas arquitectónicas, constructivas y geométricas; formas que deben formar parte del inventario de figuras con las que trabajar. ■

#### Notas

- 1 / CRESPO, I. (2005) Tesis doctoral: "*Control gráfico de formas y superficies de transición*". Barcelona: UPC p. 324: director de tesis: Joan Font Comas
- 2 / DELGADO OLMOS, A.H., (2000) , "*Diseño y análisis de formas arquitectónicas singulares. Nuevas tecnologías para su realización.*" En VIII CONGRESO DE EXPRESIÓN GRÁFICA ARQUITECTÓNICA - BARCELONA EGA 2000. Departament Expressió gràfica arquitectònica UPC. Pages 109-111
- 3 / RABASA DIAZ, E. , "*Los arcos oblicuos en la traza de cantería.*", Revista EGA, nº2, Valladolid 1994, pp. 145-154.
- 4 / La superficies de catalán son aquellas superficies de transición donde el desplazamiento de una línea recta sobre la superficie es paralela a un plano.
- 5 / CRESPO, I. (2005)b. p. 37.
- 6 / (HELMUT, ASPERL, HOFER, & KILIAN, 2007)
- 7 / CARRASCO, J. (2006) Tesis doctoral: "*La Estructura Gótica Catalana: sobre los conceptos de medida y espacio. El problema de la forma en la cubierta*". UPC: Barcelona, director de tesis: Antonio Millán Gómez.

This research work has put on the table, again, the relationship between the scientific geometry and the constructive geometry, looking for a meeting point, as has happened along the history of the architectural design. When cathedral builders in gothic times used geometrical rules did not know the mathematics bases in which these rules were based on **7**. In several moments of the history the application of the geometrical laws has been based either on the experience or on the mathematical procedure. This article pretends find a mathematical expression for a form that becomes from the practical experience of building the framework for a surface that must be done in reinforced concrete. The equal proportion in the distributed lines located is the key point that led us read the built form as a mathematical formula. ■

#### Notes

- 1 / CRESPO, I. (2005) Phd thesis: "*Control gráfico de formas y superficies de transición*". Barcelona: thesis director, Joan Font Comas.
- 2 / DELGADO OLMOS, A.H., (2000) , "*Diseño y análisis de formas arquitectónicas singulares. Nuevas tecnologías para su realización.*" En VIII CONGRESO DE EXPRESIÓN GRÁFICA ARQUITECTÓNICA - BARCELONA EGA 2000. Departament Expressió gràfica arquitectònica UPC Pages 109-111
- 3 / RABASA DIAZ, E. , "*Los arcos oblicuos en la traza de cantería.*", Revista EGA, nº2, Valladolid 1994, pp. 145-154.
- 4 / Catalan surfaces are the ruled surfaces that all straight lines are parallel to a plan.
- 5 / CRESPO, I. (2005) Phd thesis: "*Control gráfico de formas y superficies de transición*". Barcelona: pag. 35. thesis director, Joan Font Comas.
- 6 / (HELMUT, ASPERL, HOFER, & KILIAN, 2007)
- 7 / (CARRASCO, 2006) Phd thesis: "*La estructura gótica catalana: sobre los conceptos de medida y espacio. El problema de la forma en la cubierta.*" Thesis director, Antonio Millán Gómez.