MSEL
Modelling in Science Education and Learning

Modelling in Science Education and Learning
Volume 7, 2014 doi: 10.4995/msel.2014.2121.
Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

An application of Matlab© *on Dimensional Nonlinear Programming*

Una aplicación de Matlab© *sobre Programación No Lineal bidimensional*

Fernando Giménez-Palomares
Universitat Politècnica de València
fgimenez@upv.es

M. José Marín-Fernández
Universitat de València
marinfer@uv.es

Abstract

Nonlinear Programming (NLP) is a widely applicable tool in modeling real life problems applied to business, economics and engineering. Is to maximize or minimize a scalar field whose domain is given as a set of constraints given by equalities and/or inequalities not necessarily linear. In this paper we present a virtual laboratory to study the PNL graphically and numerically in the case of two variables.

La Programación No Lineal (PNL) constituye una herramienta de amplia aplicación en la modelización de problemas de la vida real aplicados a los negocios, la economía, la empresa y la ingeniería. Consiste en maximizar o minimizar un campo escalar cuyo dominio viene dado a partir de un conjunto de restricciones dadas por igualdades y/o desigualdades no necesariamente lineales. En este trabajo se presenta un laboratorio virtual que permite estudiar gráfica y numéricamente la PNL en el caso de dos variables.

Keywords: PNL, objective function, minimization, virtual laboratory, operations research.

Palabras clave: PNL, función objetivo, minimización, laboratorio virtual, investigación de operaciones.

1 Introducción

En el marco de la Investigación de Operaciones para la toma de decisiones se requiere el uso de modelos matemáticos, esto es representaciones matemáticas de situaciones reales (Winston, 2005). La selección del modelo adecuado para reproducir la realidad es una etapa crucial para obtener una solución satisfactoria a un problema real. Las estructuras matemáticas asociadas no son arbitrarias, sino una consecuencia de la realidad misma (Castillo et al, 2012). En el caso de modelos de optimización los elementos que se utilizan son

- Función objetivo

- Variables de decisión

- Restricciones

Se trata de encontrar aquellos valores, entre el conjunto de los que satisfacen las restricciones, que optimicen (maximicen o minimizen) la función objetivo. La teoría de optimización también se le conoce con el nombre de programación matemática.

Se pueden distinguir entre programación lineal o no lineal dependiendo de que la función objetivo y todas las ecuaciones o inecuaciones correspondientes a las restricciones sean lineales o alguna de ellas no lo sea. En este trabajo nos ocuparemos del caso no lineal con dos variables de decisión, caso en el que se puede obtener mucha información de tipo gráfico (y por lo tanto intuitivo) para su estudio detallado con un enfoque claramente docente.

Algunos de los programas informáticos más usados en Investigación de Operaciones son SOLVER, AMPL, GAM, NEOSOLVERS, GEOGEBRA, etc. Muchos de ellos presentan información gráfica para el caso de la Programación Lineal 2-dimensional. Desde el punto de vista docente es particularmente interesante la página web (ProgramacionLineal, (n.d.))

El uso del ordenador en las aulas ha permitido que los alumnos puedan afianzar sus conocimientos sobre un determinado tema al poder trabajar con problemas reales más complejos que los que habitualmente se estudian en clase y además con la posibilidad de visualizarlos gráficamente en muchos casos (León y Vizcarro, 1997) y (Bartolomé, 2004). En este marco los laboratorios virtuales constituyen una buena herramienta para la transmisión de conocimientos, ya que fomentan la interactividad, permiten trabajar fácilmente con modelos modelos que representan fenómenos matemáticos y físicos y pueden afianzar los conocimientos adquiridos por los alumnos (Depcik y Assanis, 2005). En este trabajo presentamos una apliación de MATLAB diseñada como una interfaz gráfica de usuario (GUI) con el objetivo de estudiar gráficamente el PNL con dos variables y restricciones dadas por desigualdades. De cara al usuario, el entorno GUI posibilita un gran grado de interactividad, sin que para ello se requiera de conocimientos de programación en MATLAB, lo que redunda en una mayor sencillez de uso y motivación para el usuario. Sobre las GUI's pueden consultarse las referencias (The Mathworks, 2008) y (Matpic).

Como antecendente de este trabajo podemos citar (Giménez y Marín, 2012) en donde se presenta un laboratorio virtual dedicado el Método de Nelder-Mead (optimización no lineal sin restricciones).

2 Programación no lineal

El problema de programación no lineal general puede formularse como sigue:

`Minimizar` $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ `(función objetivo)`

sujeto a

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \qquad (p \text{ restricciones de igualdad})$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \\ \vdots \\ h_q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \end{array}\right\} \qquad (q \text{ restricciones de desigualdad})$$

En forma compacta se escribe

`Minimizar` $F(x)$,

sujeto a

$G(x) = 0, \quad H(x) \leq 0.$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la función objetivo con $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ y $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ y $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ vienen dadas por $G = (g_1, g_2, \ldots, g_p)^T$ y $H = (h_1, h_2, \ldots, h_q)^T$ respectivamente. Para que este problema sea propiamente no lineal es necesario que al menos una de las funciones involucradas sea no lineal. Cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ se denomina solución factible, y al conjunto de todas las soluciones factibles se le denomina región factible. El problema dual consiste en maximizar $\theta(\lambda, \mu) = \inf_x \left(F(x) + \lambda^T H(x) + \mu^T G(x)\right)$ sujeto a $\mu \geq 0$.

El caso particular de PNL es cuando la optimización no lineal no presenta restricciones. Para resolver aproximadamente el problema en el caso de una variable se suele utilizar el método de la sección aurea o el método de Newton aplicado a la derivada de la función objetivo. En el caso de varias variables se usan los métodos de Nelder-Mead, del gradiente, de direcciones conjugadas, del descenso más rápido, de Newton, QuasiNewton, etc. (ver (Winston, 2005), (Hamdy, 2012) y (Eppen at al, 2000)).

En el caso de optimización no lineal con restricciones se pueden resolver usando fundamentalmente las siguientes familias de métodos (Castillo et al, 2012):

• Métodos duales: que resuelven el problema dual en lugar del original.

• Métodos de penalizaciones: que transforman el problema con restricciones en una sucesión de problemas sin restricciones. Las restricciones se introducen en la función objetivo mediante la llamada función de penalización?barrera y un adecuado parámetro de penalización.

• Método de los multiplicadores o del Lagrangiano aumentado: éste es un método de penalizaciones (cuadráticas), en el que en lugar de incorporarlas restricciones en la función objetivo se añaden a la función Lagrangiana.

• Métodos de direcciones factibles: esta clase de métodos extiende los algoritmos de di-recciones de descenso. En este contexto se fuerza a las direcciones de búsqueda, además de ser de descenso, a que den lugar a desplazamientos dentro de la región factible.

• Métodos de programación cuadrática secuencial: que resuelven una sucesión de problemas cuadráticos que aproximan iterativamente al problema original.

También existen métodos (Hamdy, 2012) que se utilizan en algunos problemas concretos como programación separable, programación cuadrática, programación estocástica, método de combinaciones lineales, algoritmo SUMT, etc.

En este nos trabajo nos centraremos en el caso de dos variables con restricciones dadas por desigualdades.

3 El laboratorio virtual

Hemos desarrollado una interfaz gráfica de usuario (GUI) de MATLAB© para estudiar el PNL 2-dimensional con restricciones de desigualdad. El aspecto gráfico de la aplicación puede verse en la Figura 1.

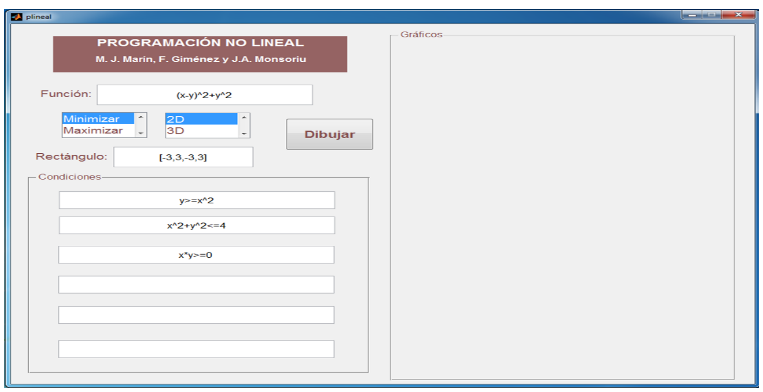

Figura 1: El laboratorio virtual.

En la parte lateral izquierda se encuentran los campos donde el usuario introduce los parámetros de entrada. En la parte lateral derecha se encuentran una ventana en donde se generan varias gráficas que proporcionan información sobre el PNL.

Los parámetros de entrada de la aplicación son:

• Función: función objetivo a minimizar o maximizar escrita necesariamente en las variables x e y.

• Despegable con las opciones de Minimizar o Maximizar.

• Despegable con las opciones de 2D o 3D. Permite seleccionar si la gráfica de la función objetivo restringida a la región factible es de pseudocolores o la superficie en el espacio.

• Rectángulo: $[a, b] \times [c, d]$ dominio inicial de la función con la forma $[a, b, c, d]$.

• Listado con las restricciones (un máximo de 6) escritas con las variables x e y.

Como salida se muestran:

• Ventana con la gráfica correspondiente a cada uno de los dominios correspondientes a cada restricción. Cada dominio se visualiza durante unos segundos. Al final se visualiza la región factible.

• Ventana con la gráfica en pseudocolores o en el espacio, de la superficie definida por la función objetivo restringida a la región factible. En la parte superior aparece la solución del PNL.

3.1 Ejemplo 1

Minimizar $f(x, y) := (x - y)^2 + y^2$
en el dominio $[-3, 3] \times [-3, 3]$ con las restricciones

$$\begin{aligned} & y \geq x^2 \\ & x^2 + y^2 \leq 4 \\ & xy \geq 0 \end{aligned}$$

Al usar la aplicación se van generando las siguientes gráficas de los dominios correspondientes a de cada una de las restricciones

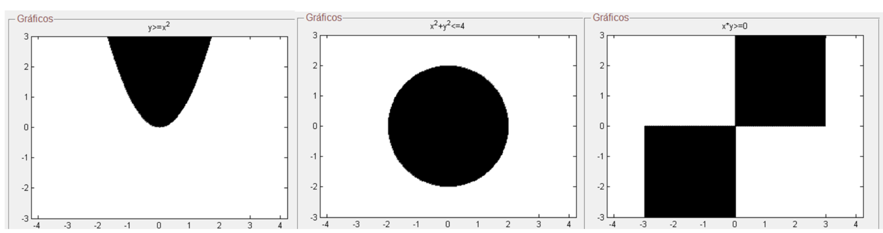

Figura 2: Dominios $y \geq x^2, x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 0$.

Al final se obtiene lo que muestra la siguiente figura:

Como vemos la solución correspondiente al PNL es aproximadamente $(0, 0)$.

 ISSN 1988-3145

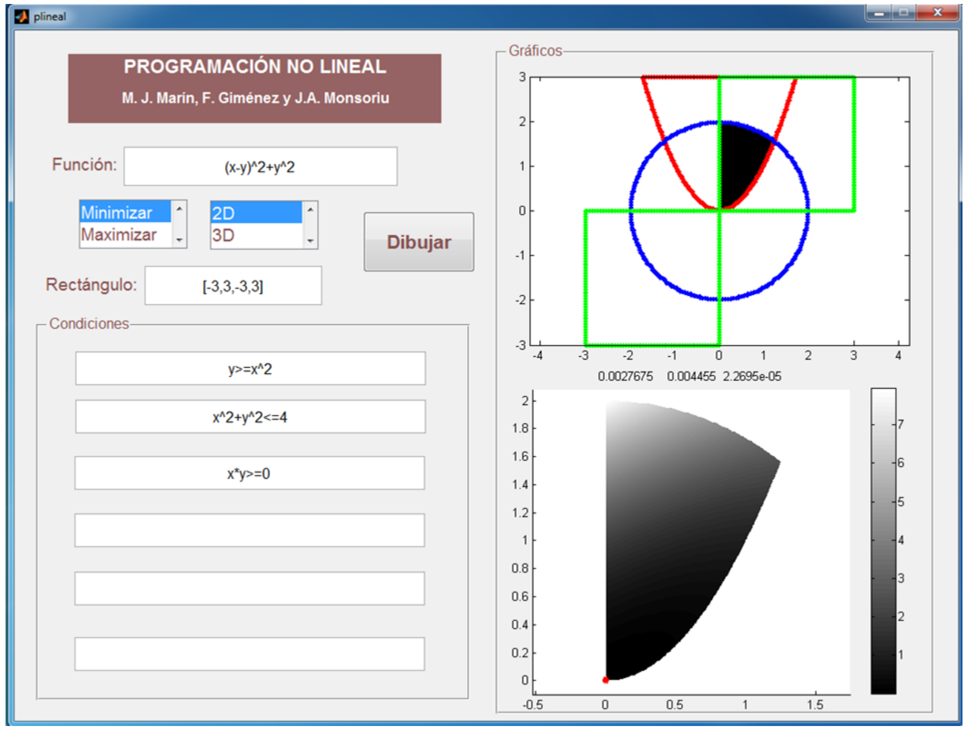

Figura 3: Resultados del ejemplo 1.

3.2 Ejemplo 2

Un ejemplo del ámbito de la Mercadotecnia (Económicas y Empresariales) (Eppen at al, 2000): el presupuesto diario de una tienda de electrodomésticos es de 100€ como mínimo. Sea x el gasto promedio diario en periódicos e y el gasto promedio en cuñas de radio. El costo anual en publicidad se estima que viene dado por

$$C(x, y) = 20000 - 440x - 300y + 20x^2 + 12y^2 + xy.$$

Se desea encontrar la mejor asignación del presupuesto que minimice el costo anual. Las restricciones son por tanto $x + y \geq 100, x \geq 0, y \geq 0$. Al aplicar el laboratorio virtual se obtiene

Podemos concluir que la mejor decisión es dedicar un promedio de 39.5? y 60.95? de gasto diario en periódicos y radio respectivamente.

3.3 Ejemplo 3

Un ejemplo del ámbito de la Resistencia de Materiales (Castillo et al, 2012): Se desea diseñar un voladizo de sección rectangular $x \times y$ y longitud L dada con peso mínimo, y a la vez que proporcione una deformación máxima transversal δ bajo la acción de una carga vertical P actuando en el extremo libre. El material para construir el voladizo tiene una peso específico conocido γ.

El objetivo es minimizar el peso

$$W(x, y) = \gamma L x y.$$

Se tiene que cumplir que la altura x debe ser mayor que un valor d dado y, de acuerdo con la teoría de resistencia de materiales, la deformación en el extremo libre viene dada por $PL^3/3EI$,

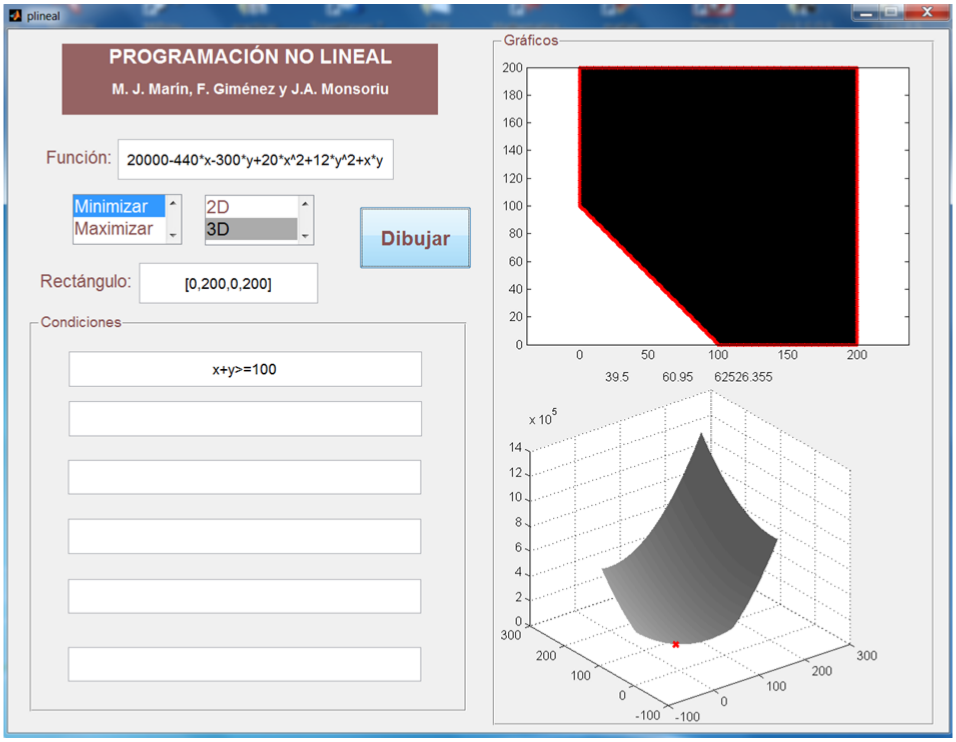

Figura 4: Resultados del ejemplo 2.

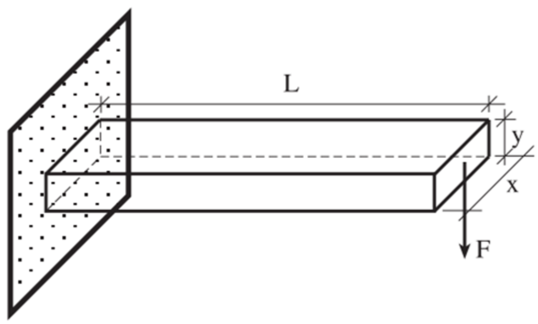

Figura 5: Voladizo.

donde E es el módulo de Young del material del voladizo, e $I = xy^3/12$ es el correspondiente momento de inercia de la sección rectangular. Se tiene que minimizar $W(x, y)$ bajo las restricciones $4PL^3/ExI^3$, $x \geq \delta$, $y \geq 0$. Resolver el problema para los datos $P = 10$ kg., $L = 50$ cm., $\delta = 0.25$ cm., $\gamma = 2.7 \times 10^{-3}$ kg./cm^3, $d = 10$ cm. y $E = 700000$ kp/cm^2. El resultado final tomando como rectángulo $[0, 30] \times [0, 30]$ es

4 Conclusiones

El laboratorio virtual que presentamos ofrece a los estudiantes la posibilidad de estudiar de forma gráficamente cualquier PNL de dos variables con restricciones de desigualdades (también problemas lineales). Éstos pueden observar cuales la forma de los dominios dados por cada una de las desigualdades y la región factible. También es posible, de manera sencilla, estudiar cual es la influencia que tiene en el problema de optimización un cambio en la función objetivo o

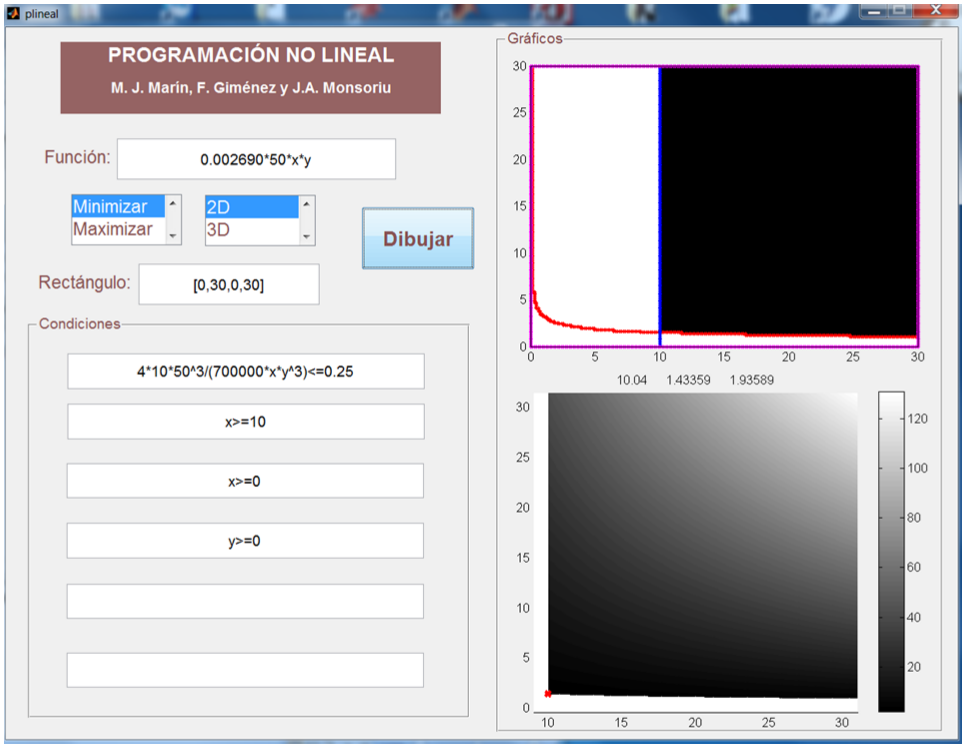

Figura 6: Resultados del ejemplo 3.

en alguna de las restricciones, esto es hacer un análisis de sensibilidad o postoptimal, que tiene por objetivo identificar el impacto que resulta en los resultados del problema original luego de determinadas variaciones en los parámetros, variables o restricciones del modelo. Además es posible su utilización para el análisis científico de problemas reales y la posterior discusión de los resultados obtenidos. Puede ser muy útil en las asignaturas de investigación de operaciones de Economía, Empresariales, Administración de Empresas, Ingenierías de Caminos, Industriales, Arquitectura, etc.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Instituto de Ciencias de la Educación de la Universitat Politècnica de València por su ayuda al Equipo de Innovación y Calidad Educativa MOMA.

Referencias

Bartolomé A. R. (2004).
Nuevas Tecnologías en el Aula.
Guía de Supervivencia, ICE-Universitat de Barcelona, Ed. Graó de IRIF, S.L.

Castillo E., Conejo A. J., Pedregal P., García R., Algualcil N. (2012).
Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia.
Ed. John Wiley & Sons Inc.

Depcik C., Assanis D. N. (2005).
Graphical user interfaces in an engineer in educational environment.
Comput. Appl. Eng. Educ., 13, 48-59.

Eppen G. D., Gould F. J., Schmidt C. P., Moore J. H., Weatheford L. R. (2000).
Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa.
Ed. Pearson.

Giménez F., Marín M. J. (2012).
Minimization of scalar fields: the Nelder-Mead method.
Actas del congreso INTED 2012.

Hamdy A. T. (2012).
Investigación de Operaciones.
Ed. Pearson.

León J. A., Vizcarro C. (1997).
Nuevas tecnologías para el aprendizaje.
Ediciones Pirámide.

Matpic (n.d.).
http://www.matpic.com/

Programación Lineal (n.d.).
http://programacionlineal.net

The Mathworks, INC. Matlab R2008a User's Guide. (2008).
The Mathworks, INC. Natik, MA. USA.

Winston W. L. (2005).
Investigación de Operaciones. Aplicaciones y algoritmos.
Ed. Thomson.

Modelling in Science Education and Learning
http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL