

Cálculo de Estructuras Isostáticas

Carlos Lázaro

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universitat Politècnica de València

© 2012, C. Lázaro. Licensed under CC BY-NC-ND 4.0

Índice general

Índice general	I
1 Introducción	1
1.1. Estructuras en la ingeniería civil	1
1.2. La estructura como sistema de sólidos deformables	4
1.3. Componentes de las estructuras	6
1.4. Requisitos que debe cumplir una estructura	7
1.5. El proyecto de estructuras	8
2 Estructuras formadas por elementos lineales	13
2.1. Sistemas estructurales	13
2.2. El modelo de la estructura	20
2.3. Modelos planos y espaciales	25
2.4. Determinación e indeterminación estática	42
3 Ecuaciones de equilibrio y diagramas de esfuerzos	49
3.1. Ecuaciones de equilibrio de la viga	49
3.2. Diagramas de esfuerzos en problemas planos	55
3.3. Diagramas de momentos torsores	68
3.4. Diagramas de esfuerzos en modelos espaciales	68
4 Conceptos elementales de Elasticidad	71
4.1. Tensión normal y alargamiento unitario	71
4.2. Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson. Ley de Hooke	73
4.3. Tensión tangencial y distorsión angular	76
4.4. Estado tensional plano	78
4.5. Círculo de Mohr	81
4.6. Tensiones y direcciones principales. Tensión tangencial máxima	83
4.7. Estados tensionales tridimensionales. Círculo de Mohr en 3D	91
5 Fundamentos de la teoría de vigas de Navier–Bernoulli	93
5.1. Extensión	94
5.2. Flexión	100
5.3. Torsión	107
5.4. Resumen de las variables de los problemas elementales	113
6 Tensiones normales producidas por la extensión y la flexión	115

6.1. Flexión simple y flexión compuesta	115
6.2. Flexión esviada	117
6.3. Clasificación de las solicitaciones de flexión	122
6.4. Efecto de un axil excéntrico. Concepto de núcleo central	123
7 Tensiones tangenciales debidas a solicitaciones de corte y torsión	125
7.1. Tensiones tangenciales debidas a solicitaciones de corte	126
7.2. Tensiones tangenciales producidas por solicitaciones de torsión	131
8 La deformada de la estructura	135
8.1. Ecuación diferencial de la elástica	135
8.2. Fórmulas de Navier–Bresse	137
8.3. Teoremas de Mohr	139
8.4. Cálculo de desplazamientos en barras no coincidentes con el eje x	149
8.5. Representación de la deformada	152
8.6. Deformaciones y desplazamientos debidos a cambios de temperatura	158

Introducción

1.1. Estructuras en la ingeniería civil

En un sentido amplio se puede definir la estructura como el esqueleto resistente de una construcción. Es la parte de la construcción cuya misión es resistir las acciones exteriores (como fuerzas, cambios de temperatura o movimientos impuestos), de forma que ésta sea segura y cumpla adecuadamente la función para la que ha sido proyectada durante su vida útil. En la ingeniería civil son múltiples los ejemplos de estructuras.

1.1.1. Estructuras para el transporte

Las infraestructuras del transporte (líneas ferroviarias, carreteras y autovías) se caracterizan por su carácter generalmente lineal. Para salvar obstáculos naturales, zonas de drenaje o cruces con otro tipo de infraestructuras es necesario construir obras de paso a diferente nivel. Se trata de estructuras que generalmente se clasifican por su importancia en estas categorías: puentes, viaductos y obras de fábrica. Dentro de la categoría de los **puentes** (figura 1.1) se incluyen tipos muy diferentes de estructuras: desde los grandes pasos sobre estrechos o estuarios (con luces que pueden superar el kilómetro) hasta los pasos superiores sobre otras carreteras, con luces pequeñas (del orden de la decena o veintena de metros).



Puente sobre el Cabriel
(Lucio del Valle, 1851)



Puente del Pino sobre el Duero
(Ribera, 1914)

Figura 1.1: Puentes

1. INTRODUCCIÓN

Los **viaductos** (figura 1.2) suelen ser puentes de múltiples vanos y gran longitud en vías de alta capacidad; generalmente salvan obstáculos naturales como valles o laderas con grandes desniveles.



Figura 1.2: Viaducto de Millau (Virlogeux, 2004)

El concepto de **obras de fábrica** es hoy en día algo ambiguo; históricamente hacía referencia a estructuras de dimensiones pequeñas o incluso a puentes, construidos mediante *fábrica de piedra o ladrillo*. Actualmente suele referirse a obras de hormigón armado para salvar drenajes o pequeños pasos bajo la calzada o la vía. Esta clasificación no es, ni mucho menos, estricta.

1.1.2. Estructuras para la ingeniería hidráulica

Presas, conducciones, **acueductos** y **depósitos** son ejemplos de estructuras para las obras de ingeniería hidráulica. Su particularidad principal consiste en que deben resistir el efecto del agua conducida o almacenada, además del resto de acciones que aparecen normalmente en las estructuras.



Presa de Aldeadávila
(Martínez Artola, 1962)



Acueducto de Alloz
(Torroja, 1940)

Figura 1.3: Estructuras para la ingeniería hidráulica

1.1.3. Estructuras para la edificación

Los tipos de estructura empleados en edificación son muy diversos. Es usual emplear **entramados de vigas y pilares** con uniones rígidas (también llamados *estructuras aporticadas*, fig. 1.4) como estructuras para edificios de altura pequeña o moderada.



Figura 1.4: Entramado de edificación

Las edificaciones para la industria requieren estructuras funcionales con pocas columnas agrupadas en alineaciones (fig. 1.5), para un aprovechamiento máximo del espacio.



Figura 1.5: Estructura para un edificio industrial

En estadios, en edificios para la celebración de espectáculos de afluencia masiva, y en construcciones singulares se proyectan **soluciones estructurales especiales** (fig. 1.6), que no pueden ser englobadas en una única categoría.

1.1.4. Estructuras de cimentación y estructuras de contención del terreno

Otro grupo importante de aplicaciones estructurales en ingeniería civil es el formado por las estructuras necesarias para transmitir las acciones al terreno o resistir los empujes del terreno sobre la construcción. Éstas últimas aparecen siempre que es necesario actuar en el subsuelo, sea en vaciados (excavación necesaria para la construcción) en los que es necesaria una **estructura de contención** del terreno, o en túneles en los que se impide el desmoronamiento de la roca mediante una **estructura de sostenimiento**. También se requiere estructuras de contención

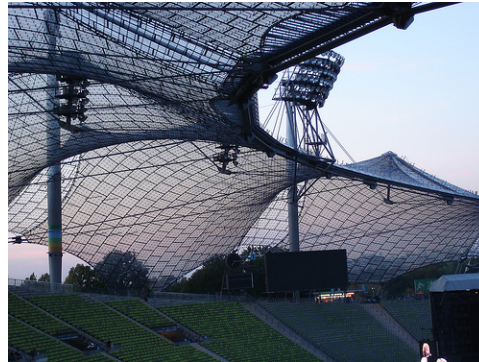


Figura 1.6: Estadio Olímpico en Munich (Behnisch, Otto, Schlaich, 1972)

(**muros**) en obras en superficie en las que aparecen desniveles que deben salvarse en un espacio reducido.



Contención mediante un muro-pantalla



Sostenimiento de un túnel

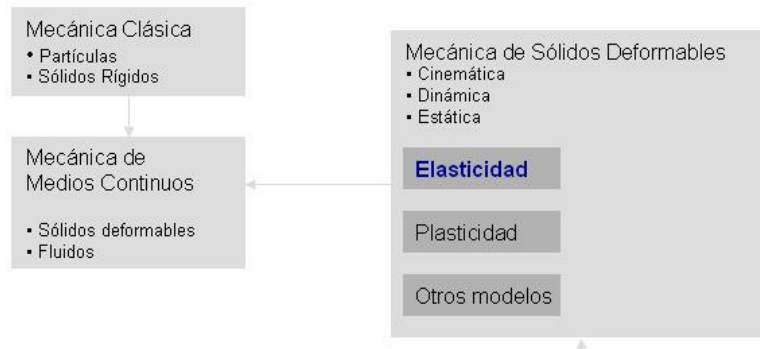
Figura 1.7: Estructuras de contención y sostenimiento

1.1.5. Estructuras auxiliares durante la construcción

Durante la construcción de las obras es necesario emplear máquinas y elementos auxiliares para la elevación de cargas –**grúas**– o para soportar provisionalmente el peso de elementos constructivos que aún no han sido fijados en su posición definitiva, o aún no han fraguado (en el caso de elementos de hormigón) –**cimbras** y **andamios**–. Estos elementos auxiliares constituyen frecuentemente auténticas estructuras que requieren definición y comprobaciones adecuadas a su finalidad.

1.2. La estructura como sistema de sólidos deformables

Una estructura puede ser considerada como un conjunto de *sólidos deformables* vinculados entre sí. Por ello, el análisis de estructuras está relacionado con el estudio de la **Mecánica de Sólidos Deformables**, que es una parte de la *Mecánica de Medios Continuos*.



La Mecánica de Sólidos Deformables estudia el cambio de forma (descrito mediante magnitudes denominadas **deformaciones**) y las fuerzas internas (descritas mediante magnitudes denominadas **tensiones**) debidas a las fuerzas que actúan en el volumen y la superficie de un sólido con forma arbitraria. La descripción de las relaciones existentes entre las tensiones y las deformaciones es una de las cuestiones más complejas de esta disciplina; el caso ideal en el que esta relación es unívoca y reversible (una vez cesan las fuerzas que provocan las tensiones se recuperan las deformaciones) se denomina **Teoría de la Elasticidad**. Los conceptos elementales de esta teoría se estudian en el capítulo 4.

Volviendo a la estructura como sistema de sólidos deformables, podemos establecer el **objetivo** del **Análisis de Estructuras**, que es la *estimación cuantitativa* de

- las **reacciones** en los enlaces o vinculaciones con el exterior,
- las **fuerzas internas** (esfuerzos / tensiones) en la estructura y
- el **cambio de forma** (desplazamientos y giros / deformaciones) de la misma,

producidos por las **acciones** exteriores (fuerzas exteriores así como movimientos y deformaciones impuestas). Analizar la estructura como sistema de sólidos tridimensionales deformables es costoso y poco práctico. Es necesario simplificar el problema idealizando el comportamiento de la estructura, es decir, utilizando modelos matemáticos en los que se asume un cierto comportamiento cinemático de los sólidos que la forman. El modo de idealizar la estructura depende del tipo de componentes o elementos estructurales que la forman. El resultado de la idealización es el llamado **modelo de la estructura**, que se presentará en el capítulo 2.

1.2.1. Principio fundamental de la Mecánica de Sólidos

La Mecánica de Sólidos (y, por extensión, la Mecánica de Sólidos Deformables y la Mecánica de Estructuras) se basa en el siguiente **principio fundamental**:

La condición necesaria y suficiente para que un sólido esté en equilibrio es que lo esté cualquiera de sus partes considerándola idealmente aislada del resto.

En la práctica, el principio implica que podemos aislar **cualquier** parte de una estructura, y ésta se encontrará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores, las reacciones en los apoyos y las *fuerzas internas que el resto del sólido ejerce sobre las superficies de contacto*.

1.3. Componentes de las estructuras

1.3.1. Elementos

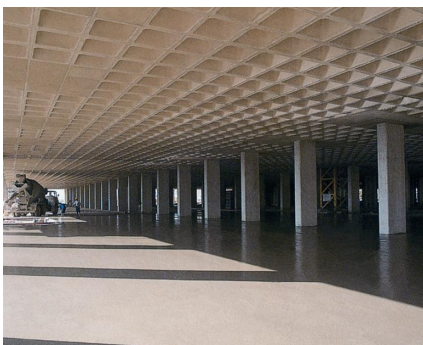
Los elementos estructurales pueden clasificarse en tres categorías en función de su geometría:

- **Elementos masivos.** Se trata de elementos estructurales en los que ninguna dimensión es claramente predominante sobre las otras. Esta clase de elementos es habitual en presas, obras de contención de tierras, estribos de puente, y en general, en situaciones en las que la masa del elemento estructural contribuye a su estabilidad.



Figura 1.8: Presa en construcción. Obsérvese el volumen de los segmentos de la presa, que finalmente conformarán un único elemento estructural masivo

- **Elementos superficiales.** En ocasiones, dos dimensiones de la estructura predominan sobre la tercera. Podemos asimilar la estructura o elemento estructural a una superficie dotada de espesor (generalmente pequeño). Cuando la superficie es plana la estructura se denomina **placa**. Las placas son elementos sometidos principalmente a flexión en dos direcciones. Cuando la superficie es curva o alabeada puede tratarse de una **lámina**, si fundamentalmente está comprimida, o una **membrana**, cuando toda ella está traccionada.



Cara inferior de un forjado reticular, que estructuralmente funciona como placa apoyada en los pilares del edificio.



Lámina del Restaurante L'Oceanografic en Valencia
(Domingo, Lázaro, Serna, 2000)

Figura 1.9: Elementos estructurales superficiales

El funcionamiento de las láminas y las membranas está determinado por su forma, que contribuye a transmitir y resistir las cargas de modo muy efectivo. Esto permite construir elementos estructurales muy delgados.

- **Elementos lineales.** Este curso se centra en estructuras formadas por elementos lineales, también denominados **vigas, barras o piezas alargadas**.

Gran parte de las estructuras de edificación y muchos puentes pueden analizarse como estructuras formadas por barras. El análisis de este tipo de estructuras constituye por ello la materia básica sobre la que se desarrolla la ingeniería estructural.



Armadura rígida para un hangar en Orvieto (Nervi, 1935)



Yaquina Bay Bridge (McCullough, 1936)

Figura 1.10: Estructuras formadas por elementos estructurales lineales

1.3.2. Enlaces

Distinguimos dos categorías de enlaces:

- **Enlaces externos.** Son las uniones de los elementos estructurales al cimiento exterior, como por ejemplo las bases de soportes, los apoyos de vigas o los anclajes de cables.
- **Enlaces internos.** Son las uniones entre elementos estructurales, como por ejemplo los nudos rígidos, las articulaciones o los apoyos a media madera.

1.4. Requisitos que debe cumplir una estructura

Una estructura correctamente proyectada y ejecutada debe ser *segura* y *funcional* durante su vida útil. Para ello debe cumplir cuatro requisitos fundamentales:

1. **Resistencia.** Es la capacidad de la estructura para soportar y transmitir las acciones sin que se produzca la rotura de los materiales o elementos que la componen. La resistencia es una cualidad directamente ligada a la **seguridad** de la construcción.
2. **Estabilidad.** Cualidad que permite a la estructura no sufrir movimientos de sólido rígido (deslizamiento o vuelco) o grandes cambios en la geometría inicial de los elementos (pandeo o abolladura). Como en el caso de la resistencia, la falta de estabilidad compromete la **seguridad** de la estructura.

1. INTRODUCCIÓN



Figura 1.11: Ejemplos de colapso debido a una resistencia insuficiente: a la derecha, colapso del puente de la I35W sobre el Mississippi en Minneapolis, el 1 de agosto de 2007

3. **Rigidez.** Capacidad de la estructura para soportar y transmitir las acciones sin que se produzcan deformaciones o movimientos excesivos que comprometan la finalidad para la que ha sido diseñada. Este requisito está relacionado con la *funcionalidad* de la obra.



Figura 1.12: Pérdida de funcionalidad debido a una rigidez insuficiente: vibraciones inducidas por el viento en un puente sobre el Volga el 21 de mayo de 2010

4. **Durabilidad.** Capacidad de mantener sus propiedades resistentes sin merma significativa en el transcurso del tiempo.

Existen otras cualidades que pueden ser muy importantes en función de las circunstancias particulares de cada obra, por ejemplo, la *economía*, la *sostenibilidad* y la *belleza*.

1.5. El proyecto de estructuras

En castellano, la palabra **proyecto** tiene dos significados en el ámbito de la Ingeniería Civil:

- Por una parte hace referencia al *proceso* de concepción, diseño, comprobación, definición y valoración de una obra (proyectar – en inglés *design*).
- Por otro lado se refiere al *conjunto de documentos* necesarios para la contratación y ejecución de la obra, que incluye la descripción y justificación de la solución adoptada

(memoria), su definición gráfica y constructiva mediante los planos, las especificaciones para los materiales y partes que la componen (pliego de prescripciones técnicas), las medidas para garantizar la seguridad de los trabajadores y la protección del medio ambiente, así como la valoración económica de la obra (presupuesto).

En algunos casos, como por ejemplo en los puentes, la obra es principalmente una estructura, y se puede decir que el objeto del proyecto es la definición de la misma. En otros casos, como en las carreteras, las estructuras (puentes, obras de fábrica) son una parte necesaria pero acotada de un proyecto más amplio, que tiene como finalidad la construcción de una obra en la que hay numerosas unidades y partes esenciales no relacionadas con las estructuras. En el ámbito de la arquitectura y edificación la estructura suele ser una parte esencial de la obra: la parte del edificio que tiene la misión de resistir las acciones que inciden sobre él.

1.5.1. Projectar una estructura

El conjunto de técnicas y conocimientos que permiten proyectar una estructura se denomina **ingeniería de estructuras**. El proceso puede separarse en tres etapas:

- **Concepción.** Es la decisión del sistema o principio estático (y posiblemente formal), de los materiales y de la geometría básica de la estructura.
- **Análisis.** Ya hemos explicado que se trata de la *determinación de las magnitudes estáticas* (reacciones y esfuerzos) *y cinemáticas* (desplazamientos y giros) *producidas por las acciones exteriores*, que permiten cuantificar la respuesta de la estructura y disponer de datos para verificar los criterios de seguridad que exige la normativa. Hoy en día análisis se lleva a cabo mediante uno o más **modelos de cálculo** de la estructura. *La asignatura Análisis de Estructuras es precisamente una introducción a los conocimientos y técnicas necesarios en esta etapa del proyecto.* Existen además otros aspectos más avanzados del análisis estructural, como por ejemplo los relacionados con él comportamiento dinámico (evaluación de velocidades y aceleraciones) o el análisis de la estabilidad de la estructura (pandeo o abolladura), que no son objeto de esta asignatura.
- **Dimensionamiento y comprobación.** Consiste en la *determinación y/o comprobación de las dimensiones* (canto, espesor...), *cuantías* y *características resistentes* de los materiales que forman los elementos estructurales, a partir de (a) los resultados del análisis estructural, así como (b) del cálculos de la capacidad resistente de los elementos. Esta parte del proyecto se estudia en asignaturas tecnológicas específicas como *Hormigón Estructural* o *Estructuras Metálicas*.
- **Definición constructiva** Los resultados de las etapas anteriores conducen a conclusiones relativas a la geometría de los elementos estructurales y a los materiales que se debe emplear para construirlos, que deben expresarse mediante memorias descriptivas y justificativas, planos de construcción, especificaciones o condiciones técnicas de producción y ejecución, y la valoración o presupuesto de la obra.

1.5.2. Comprobación de la seguridad. El método de los estados límite

La comprobación de la seguridad de los elementos estructurales y, por extensión, de la funcionalidad y de la durabilidad, está basada en el **método de los estados límite**.

La filosofía de este método consiste en comprobar que el efecto (en términos de fuerzas internas o de cambios de forma) que una o varias combinaciones relevantes de acciones producen sobre un elemento estructural es inferior a la capacidad del elemento (en términos de resistencia mecánica o de deformabilidad). Cada una de estas comprobaciones corresponde a lo que se denomina un *estado límite*, es decir, una situación en la que se produciría el fallo de la estructura por una causa física concreta (un modo de rotura o un modo de deformación determinados).

Para considerar el hecho de que tanto las acciones como las capacidades resistentes de los materiales son variables aleatorias se emplean coeficientes (de mayoración y de combinación de las acciones, y de minoración de la resistencia) que multiplican las acciones y dividen las resistencias. Mediante estos coeficientes se estiman valores de las acciones que tienen una cierta probabilidad (muy baja) de ser excedidos (o de no ser superados en el caso de las resistencias). Por ello se dice que el método de los estados límite es un método semiprobabilístico.

1.5.3. Responsabilidad del ingeniero en el proyecto de estructuras

En la práctica profesional, el ingeniero civil puede intervenir en todas las etapas de desarrollo del proyecto de una estructura¹: desde el estudio de soluciones, pasando por la elaboración del anteproyecto, hasta el análisis, la comprobación y la definición de la estructura para su ejecución. En la fase de construcción es posible participar en la supervisión y/o dirección de la ejecución de la estructura. Habitualmente, salvo en el caso de estructuras sencillas, el autor del proyecto suele ser un profesional especializado.

Por regla general, la elaboración de los documentos apropiados en cada una de estas etapas es preceptiva en nuestro país. La finalidad de estos documentos no es solamente técnica, sino también administrativa. Por ejemplo, un proyecto de construcción es un conjunto de documentos que sirve para la definición y valoración de la obra a ejecutar, pero también recoge la justificación de las decisiones adoptadas en el proceso de diseño, incluye de forma preceptiva documentos justificativos de determinada normativa y, no menos importante, determinadas partes del proyecto pasan a formar parte del contrato de ejecución de las obras entre la propiedad y el constructor.

El ingeniero puede responsabilizarse de la totalidad o de parte del proyecto o de la dirección de obra, en función de las características de la misma y del encargo que haya recibido, o de su papel dentro del equipo redactor del proyecto. Al redactar y firmar documentos del proyecto, o al asumir la dirección de las obras, el ingeniero asume la responsabilidad derivada de los documentos entregados o las decisiones tomadas. Esta responsabilidad tiene una vertiente civil (económica) en el caso que se produjesen daños como consecuencia de los documentos entregados o de las decisiones adoptadas. La responsabilidad por daños podría llegar a ser penal si se hubiera producido negligencia en el ejercicio profesional.

¹Otros profesionales como los arquitectos o los ingenieros industriales tienen también competencias profesionales en este campo

1.5.4. Documentos relacionados con el proyecto de la estructura

Al menos dos partes del proyecto de construcción son plena responsabilidad del técnico que proyecta la estructura: el *anejo de cálculo* de la estructura y los *planos* que definen la estructura.

- El anejo debe contener los cálculos y análisis que justifican las decisiones adoptadas en la definición de la estructura y su cimentación, y el cumplimiento de la normativa vigente. A título orientativo se debe incluir al menos:
 1. La descripción de la estructura y la cimentación.
 2. La enumeración de los materiales empleados y sus características.
 3. Una relación de la normativa de aplicación.
 4. La relación y cuantificación de las acciones a considerar según la normativa.
 5. La descripción y caracterización de los modelos de cálculo empleados en el análisis, incluyendo los distintos casos de carga (acciones) y los principales resultados del análisis en cada caso.
 6. Las comprobaciones que justifican la seguridad en los distintos estados límite para las combinaciones de acciones relevantes en cada elemento estructural.
- Los planos de construcción deben contener la definición geométrica de detalle de los distintos elementos de la estructura, la designación conforme a la normativa vigente de los distintos materiales y elementos que componen la estructura y aquellas especificaciones que deben ser tenidas en cuenta en la ejecución, de modo que la estructura pueda producirse y ejecutarse correctamente. Por lo tanto, los planos deben entenderse y poder leerse como un documento más del proyecto, y no como un conjunto de dibujos aproximados de lo que se desea construir.

Estructuras formadas por elementos lineales

Gran parte de las estructuras en ingeniería están formadas por elementos lineales (también denominados piezas alargadas), que generalmente son barras o cables. Decimos que un elemento estructural es lineal cuando la relación entre sus dimensiones transversales (canto h y ancho b) y su longitud l es pequeña:

$$h/l \cong b/l \ll 1 \quad (\text{en general } < 1/10).$$

Las piezas de acero laminado o conformado (plegado) en frío o los elementos estructurales de hormigón armado o pretensado son ejemplos de barras.



Viga en doble T de hormigón pretensado



Perfiles de acero laminados en caliente

Figura 2.1: Ejemplos de vigas

En función de su misión resistente dentro de la estructura, las barras reciben nombres específicos, como por ejemplo: **columnas**, **soportes** o **pilares**, cuando transmiten cargas verticales y están comprimidos; **dinteles**, si salvan la luz entre pilares en un pórtico; **tornapuntas** o **puntales**, cuando son inclinados y soportan otros elementos funcionando a compresión; **jácenas**, que son las vigas en un entramado de vigas y pilares; **ménsulas** o **voladizos** son elementos unidos rígidamente en un extremo y libres en el otro.

2.1. Sistemas estructurales

La siguiente clasificación de estructuras formadas por elementos lineales está basada en [Engel, Sistemas de Estructuras]. Las distintas categorías se ordenan en función del principio resistente que gobierna su comportamiento. Como toda sistematización, no deja de tener una

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

componente de arbitrariedad. Existen, por tanto, otros criterios posibles y también es posible encontrar estructuras que no pueden encajarse fácilmente dentro de uno solo de estos grupos.

2.1.1. Cables y arcos de fábrica

En esta sección incluimos aquellos sistemas estructurales en los que los elementos estructurales están dispuestos de modo que todos ellos están sometidos a tracción pura (o tensión), o bien a compresión pura (el comportamiento elemental de elementos traccionados o comprimidos se describe en la sección 5.1.1). En este tipo de estructuras forma y estática son inseparables: la forma y disposición de los elementos permite que estos funcionen del modo más efectivo. Por ello, algunos autores (Engel) las denominan sistemas de *forma activa*. Generalmente se trata de estructuras elegantes y también muy eficientes, en el sentido de que el consumo de material es mínimo. En función de si se trata de sistemas en tracción o en compresión distinguimos dos categorías:

Estructuras en tensión. Cables, mallas de cables

El tipo de elemento estructural apropiado en estructuras en tensión es el **cable**. Únicamente es capaz de soportar tracciones y su rigidez a flexión es suficientemente baja como para despreciarla en el análisis.

Las estructuras formadas únicamente por elementos traccionados adoptan la forma **funicular**. Recordemos que el funicular correspondiente a una carga uniformemente distribuida sobre la proyección horizontal es una parábola (que es la forma aproximada de los cables principales en los puentes colgantes), y en el caso de una carga distribuida por unidad de longitud del propio cable, el funicular adopta la forma de catenaria (la pasarela sobre el Traversiner es un ejemplo aproximado de esta situación). Cuando los cables se disponen formando una superficie alabeada, el sistema se suele denominar **mallado de cables**.

En general, la forma funicular depende de la distribución y magnitud de las cargas que actúan sobre la estructura. Como no es funcionalmente aceptable que se produzcan cambios significativos en la geometría de la estructura, los cables son sometidos a una tensión inicial (pretensado) que determina la forma global que adopta el sistema. Por ello se suelen denominar **estructuras en tensión** (*tension structures* en inglés).



Pasarela sobre el Traversiner (Suiza)
(Conzett, Bronzini, Gartmann AG, 2005)

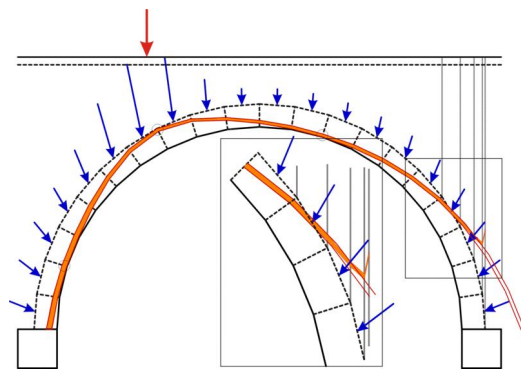


Pasarela en Löwentor (Stuttgart)
(Schlaich, Bergermann und Partner, 1992)

Figura 2.2: Estructuras en tensión

Estructuras en compresión. Arcos de fábrica

Si invertimos un funicular sin modificar el sentido de las cargas obtenemos un sistema estructural que funciona solamente comprimido. La curva (o polígono) resultante se denomina **antifuncular** y en el caso de que las cargas sean gravitatorias adopta la forma de un arco. Este resultado teórico aparece de forma natural al analizar el funcionamiento del arco de fábrica, forma arquitectónica empleada desde la antigüedad clásica. En el arco de fábrica las cargas exteriores se equilibran mediante fuerzas internas que forman una curva antifuncular ideal también denominada línea de empujes. Si las acciones exteriores cambian también lo hará la línea de empujes, que se adaptará hasta equilibrarlas. Este mecanismo es el que permite que el arco mantenga su geometría, que puede entenderse como envolvente de los antifunculares. Si para un cierto estado de carga el antifuncular permanece contenido dentro del arco, será posible que la estructura permanezca en equilibrio.



Línea de empujes (antifuncular)
en un arco de fábrica



Pont des Invalides (París)
(G. de Lagalissérie y Savarin, 1855)

Figura 2.3: Estructuras en compresión

2.1.2. Vigas, arcos y pórticos

Esta categoría incluye aquellos sistemas formados por elementos en los que predomina el trabajo de flexión, tal como se describe en la sección 5.2. Una **viga** es, en sentido estricto, un elemento estructural que resiste y transmite las cargas mediante el mecanismo de flexión. Por extensión, el término viga se usa también en elementos que, adicionalmente a la flexión, están también sometidos a compresión o tracción (sección 5.1.1), e incluso a torsión (sección 5.3) (como las vigas de los tableros de puentes). Engel denomina sistemas de *sección activa* a los sistemas formados por esta clase de elementos, debido a que el reparto y la distribución de tensiones tiene lugar en cada *sección transversal*, que juega un papel fundamental en el análisis. La aparición de tracciones, compresiones y tensiones tangenciales sobre la sección permite limitar el tamaño de la estructura al mínimo, a costa de aumentar localmente la sollicitación del material: la viga permite salvar luces importantes con un **canto** (dimensión vertical de la sección transversal del elemento estructural) estricto. La economía en las dimensiones de la estructura se traduce en muchos casos en ahorro en otros elementos constructivos (por ejemplo, un forjado edificación funcionando a flexión, y por tanto de canto reducido, supone un ahorro en la superficie de fachada y de revestimientos verticales interiores), e incluso en ahorro en la construcción (colocar una viga es una operación relativamente simple). Por ello estos sistemas

se emplean habitualmente en ingeniería civil y en edificación. El curso de análisis de estructuras se centra sobre todo en su estudio. Hemos agrupado estas estructuras en tres categorías que determinan la evolución desde el esquema más simple de viga hasta el entramado de nudos rígidos pasando por las vigas curvas o arcos.

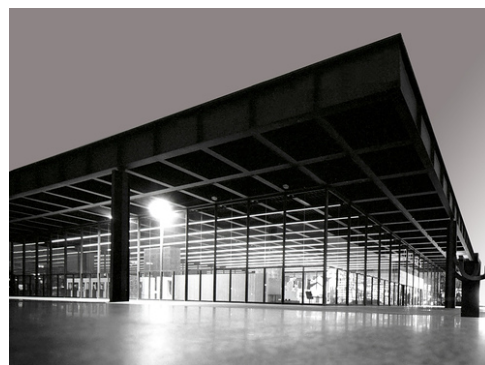
Vigas y emparrillados. Vigas simplemente apoyadas, vigas continuas, vigas-columna (soportes)

Denominamos **viga simplemente apoyada** a aquella cuyos apoyos se encuentran en sus extremos y permiten el giro de los extremos (el puente grúa amarillo de la figura es un ejemplo). Una **viga continua** dispone de tres o más apoyos a lo largo de su longitud (como la viga-carril sobre la que desliza el puente grúa). El soporte o **viga-columna** es un elemento estructural que está sometido principalmente a compresión, pero también soporta flexiones de cierta magnitud; los pilares del edificio industrial de la figura son un ejemplo de esta categoría.

Un **emparrillado** es un entramado de vigas rígidamente unidas, dispuestas en dos direcciones, contenidas en un plano y cargadas perpendicularmente al plano.



Distintos tipos de vigas en un edificio industrial



Neue Nationalgalerie (Berlin)
(Arq. M. van der Rohe, 1968)

Figura 2.4: Vigas y emparrillados

Arcos. Bóvedas nervadas

Los **arcos** construidos mediante materiales estructurales modernos (hormigón y/o acero) siguen trabajando predominantemente en compresión por su propia forma. Sin embargo pueden desarrollar también flexiones importantes debidas al modo en el que se transfieren a ellos las cargas exteriores, o a la propia distribución de las cargas.

La versión tridimensional del arco comprimido y flectado es la **bóveda nervada**, que está constituida por arcos dispuestos según los meridianos y vigas curvas rígidamente unidas a los arcos formando paralelos.

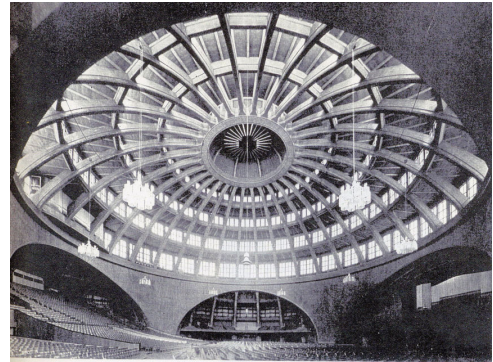
Pórticos y entramados

Se denomina **pórtico** a una estructura formada por vigas y pilares rígidamente unidos. Puede tener uno o varios vanos, y una o más alturas. Es el tipo estructural plano usual en naves industriales (como la mostrada en la figura).

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES



Arco sobre el embalse de Ricobayo
(S. Pérez Fadon, 1995)



Jahrhunderthalle en Wroclaw (Polonia)
(Arq. M. Berg, Ing. G. Trauer, 1912)

Figura 2.5: Arcos y bóvedas nervadas

Cuando las vigas se disponen en dos direcciones en el plano se obtiene una estructura tridimensional de nudos rígidos denominada **entramado**, que es el tipo usual en estructuras convencionales de edificación.

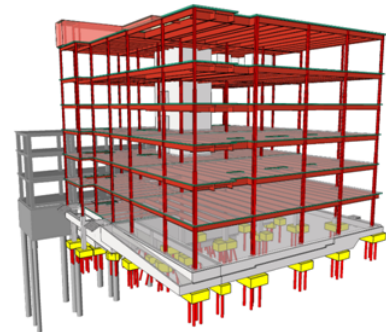


Figura 2.6: Pórticos en una nave industrial y entramado en una estructura de edificación

2.1.3. Estructuras articuladas

Clasificamos dentro de la categoría de las **estructuras articuladas** (también denominadas **estructuras trianguladas**), aquellos sistemas estructurales formados por barras articuladas entre si, de modo que soportan únicamente compresiones o tracciones cuando las cargas exteriores actúan sobre los nudos. Como se ha estudiado en Mecánica, cuando las cargas se aplican directamente sobre las barras, éstas soportan también esfuerzos de corte y flexión. Si los nudos no son articulaciones ideales, también aparecen flexiones que suelen ser despreciables si la estructura está bien concebida. En la práctica denominaremos también estructuras articuladas a aquellas cuyos nudos no sean articulaciones perfectas (pueden ser incluso nudos rígidos), con la condición de que sus barras están dispuestas como las de una estructura articulada.

Vigas trianguladas, cerchas y mallas espaciales planas

Una estructura articulada plana que salva uno o varios vanos puede entenderse como una viga en la que en lugar de momentos flectores hay pares de fuerzas en las barras superiores e inferiores (denominadas *cordón superior* y *cordón inferior*), y en lugar de esfuerzos cortantes hay fuerzas conocidas por las barras diagonales¹. Por ello se denominan **vigas trianguladas**. Cuando la estructura triangulada plana se proyecta para salvar el vano de un edificio o nave, resistiendo el peso de la cubierta, se suele denominar **cercha**. Las **mallas espaciales planas** son estructuras de barras articuladas formando tetraedros. Pueden considerarse como la versión tridimensional de las estructuras trianguladas, y permiten cubrir superficies importantes con economía de material.



Montaje de una cercha
en un edificio industrial

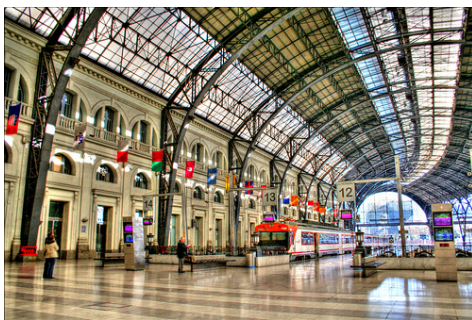


Malla espacial en la Expo de Osaka
(Arq. Isozaki, Ing. M. Kawaguchi, 1968)

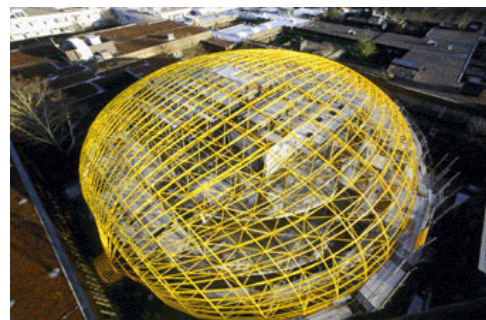
Figura 2.7: Vigas trianguladas y mallas espaciales

Arcos y pórticos triangulados y mallas espaciales curvas

El mismo concepto introducido en la sección anterior puede aplicarse a pórticos y arcos concebidos como estructuras trianguladas, y también a bóvedas y cúpulas, que pueden conformarse mediante mallas espaciales cuya geometría se adapta a una superficie curva permitiendo generar envolventes estructurales en edificios con geometrías complejas.



Estación de Francia (Barcelona)
(Arqs. P. Muguruza, F. Gallego, 1929)



Biblioteca de Filología (Berlín)
(Arq. N. Foster, Ing. Pichler GmbH, 2005)

Figura 2.8: Arcos y bóvedas trianguladas

¹Recuérdese el denominado método de las secciones o método de Ritter de la asignatura *Mecánica*

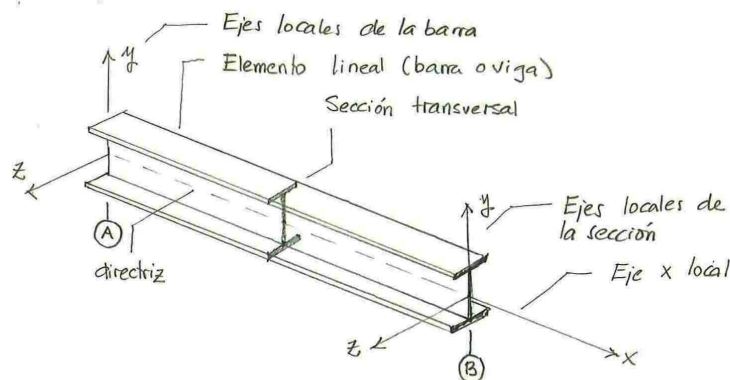
2.2. El modelo de la estructura

La *idealización* de la estructura es el procedimiento necesario para su análisis. Se trata de reducir el estudio del problema complejo de comportamiento de un sistema de sólidos deformables (la estructura tridimensional) al análisis de un problema simplificado, en una sola dimensión (la del eje o directriz de cada elemento lineal). La simplificación se consigue asumiendo que los elementos lineales o barras del sólido tienen un comportamiento cinemático (es decir, un modo de deformarse) determinado por su forma alargada.

2.2.1. Componentes

Elementos estructurales

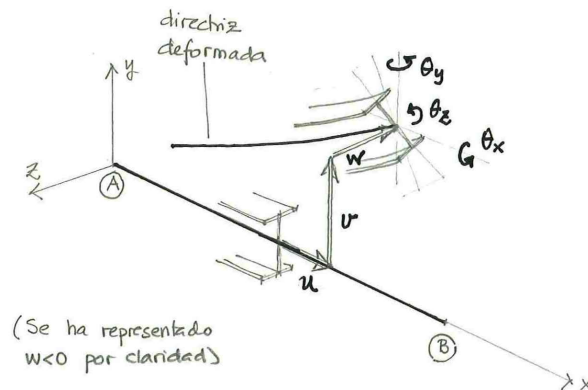
Para entender el funcionamiento del modelo es útil observar un elemento estructural aislado del resto. Este elemento se denomina **barra** o **viga**. Los cortes transversales ideales de la viga son las **secciones transversales**. Sus centros de gravedad definen la **directriz**, que es una línea recta o curva (si la barra es curva) en el espacio. Las secciones transversales son, por tanto, ortogonales a la directriz. Las variables asociadas al elemento se referirán a un sistema de referencia local dispuesto de tal forma que el eje x está alineado con la directriz del elemento estructural.



El paso 3D \rightarrow 1D se realiza asumiendo que cada **sección transversal** de la viga es **indeformable en su plano**. Por ello, los desplazamientos de cada punto de la sección (que son funciones de las variables x, y, z que definen su posición inicial) se pueden expresar en función de los **desplazamientos** y **giros** de la directriz, que son únicamente funciones de la posición x sobre la directriz. La complejidad del problema se reduce, pues los desplazamientos y giros se describen mediante funciones de una sola variable independiente. Denominamos **grados de libertad** a los desplazamientos y giros del modelo.

	Denominación	Dimensión	Unidades (SI)
Desplazamientos	u, v, w	[L]	m
Giros	$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	[-]	rad

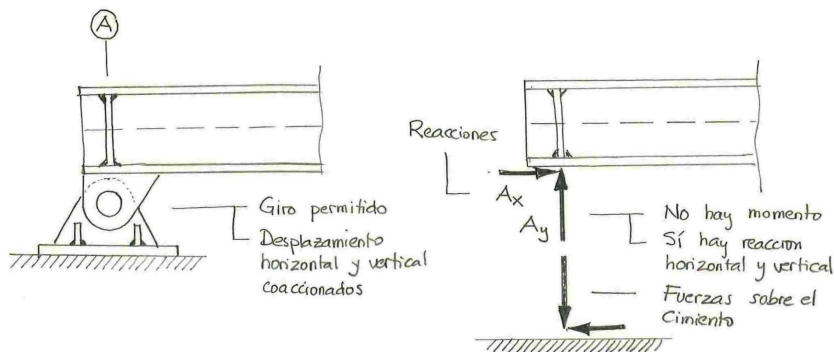
Cuadro 2.1: Grados de libertad del modelo



Enlaces

El modelo de la estructura se completa teniendo en cuenta que sus distintos elementos se unen entre sí mediante **enlaces internos**, también denominados **nudos**. El se vincula al cimiento por medio de **enlaces externos** o **apoyos**.

Los *enlaces externos* coaccionan determinados grados de libertad en los extremos de las barras que confluyen en ellos. Cada grado de libertad coaccionado transmite una componente de fuerza (o de momento) al cimiento. La **reacción** es la componente igual y de sentido contrario que actúa sobre la estructura.



Los *enlaces internos* transmiten las fuerzas (o algunas de sus componentes) que actúan en los extremos de las barras que unen. Por otra parte, los enlaces internos vinculan grados de libertad en los extremos de las barras: por ejemplo, un nudo rígido vincula los desplazamientos y giros de los extremos de cada barra confluyente (o lo que es equivalente, coacciona los desplazamientos y giros relativos entre ellos). A cada desplazamiento o giro relativo coaccionado corresponde una ecuación de equilibrio en la que intervienen las componentes de las fuerzas (o momentos) en extremos de barra y las de las fuerzas exteriores sobre el nudo.

2.2.2. Fuerzas exteriores

Acciones

La idealización debe también aplicarse a las **acciones** o cargas exteriores sobre el sólido. Las fuerzas de superficie (aplicadas sobre las caras laterales de las barras) deben ser transformadas

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

en fuerzas por unidad de longitud, que se suponen actuando sobre la directriz. Pueden emplearse subíndices que hacen referencia al eje local correspondiente para indicar la dirección de cada componente de la fuerza por unidad de longitud. También se considera la actuación de fuerzas y momentos (pares) puntuales sobre el modelo.

	Denominación	Dimensión	Unidades (SI)
Fuerza puntual	$F, P, H...$	[F]	N, kN, MN
Par (momento)	M	[F L]	kN m
Fuerza distribuida	q	[F/L]	kN/m
Par distribuido	m	[F]	m kN/m

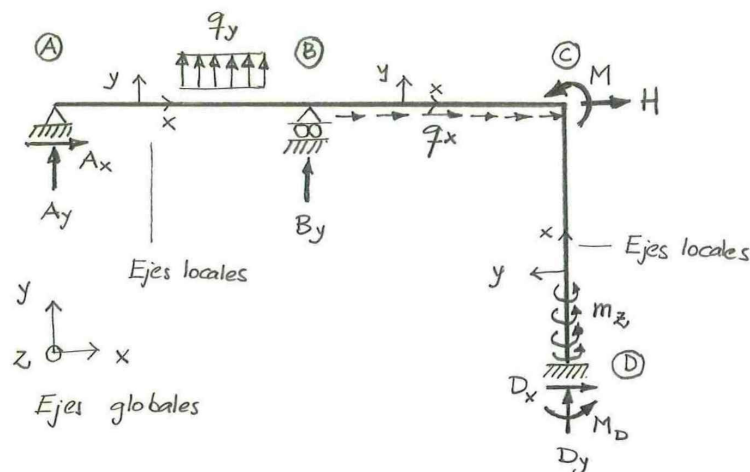
Cuadro 2.2: Acciones (cargas) sobre el modelo

Reacciones

Las reacciones son las fuerzas que el cimiento transmite a la estructura, necesarias para el equilibrio del conjunto. sus componentes se denotan mediante los subíndices que indican el eje coordenado global correspondiente.

	Denominación	Dimensión	Unidades (SI)
Reacción (fuerza)	R, A, B	[F]	N, kN, MN
Reacción (momento)	M	[F L]	kN m

Cuadro 2.3: Reacciones



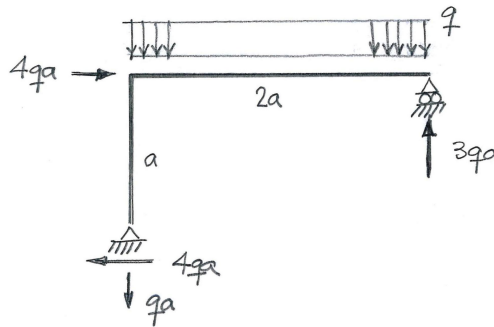
2.2.3. Fuerzas internas: esfuerzos

El Principio fundamental de la Mecánica de Sólidos deformables indica que si se aísla cualquier parte de una estructura en equilibrio, esta parte también se encontrará en equilibrio. En él intervendrán las fuerzas internas (es decir, las tensiones) en los cortes o superficies de

contacto con el resto de la estructura, así como las acciones y reacciones que actúan sobre la parte del sólido que se ha aislado. Cuando trasladamos este principio al modelo, los cortes ideales se llevan a cabo por las secciones de la viga, y las fuerzas (y momentos) internas que actúan sobre estos cortes se denominan **esfuerzos**. Emplearemos la siguiente terminología: la **cara frontal** de la sección es la que mira en el sentido de avance (positivo) del eje x local. La **cara dorsal** es la opuesta.

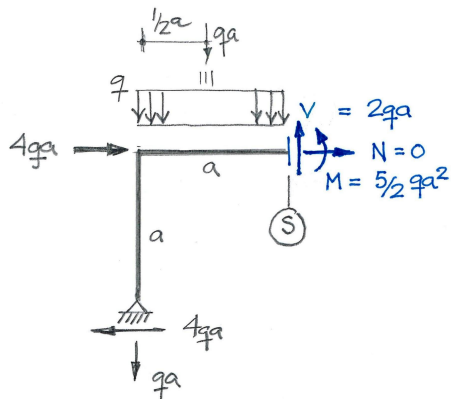


Consideremos una estructura en equilibrio:



Las siguientes definiciones para los esfuerzos son consecuencia del principio de equilibrio, y son completamente equivalentes:

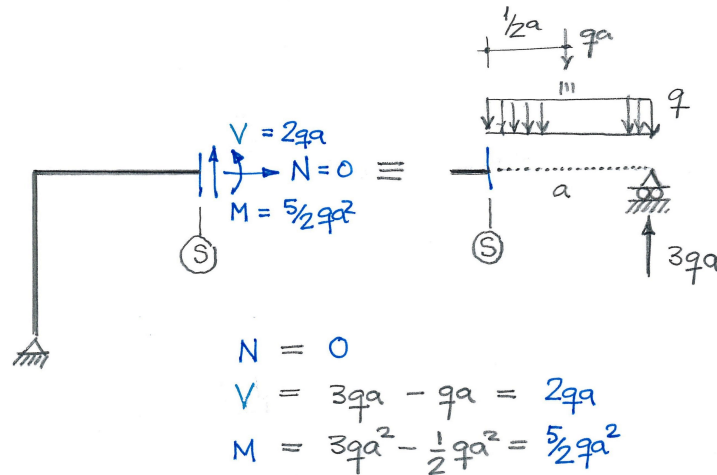
- Definición A.** Dada una estructura en equilibrio si llevamos a cabo un corte por una sección dada, los esfuerzos sobre la sección son las fuerzas y momentos (internos) que actúan sobre la cara frontal necesarios para que la parte de la estructura limitada por ella se encuentre en equilibrio.



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad 4qa - 4qa + \overset{N}{0} = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad -qa - qa + \overset{V}{2qa} = 0 \\ \sum M_{z_A} = 0 & \quad -4qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 + 2qa^2 + \overset{M}{\frac{5}{2}qa^2} = 0 \end{aligned}$$

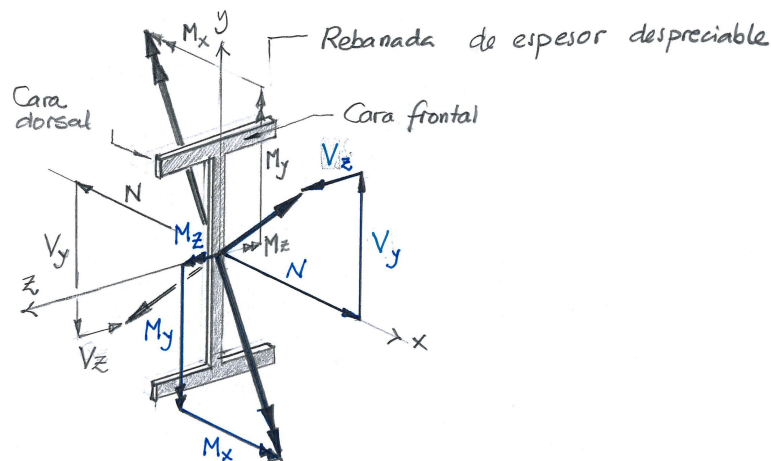
2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

- Definición B.** Dada una estructura en equilibrio si llevamos a cabo un corte por una sección dada, los esfuerzos sobre la sección son las fuerzas y momentos (internos) sobre la cara frontal estáticamente equivalentes a las cargas exteriores y las reacciones que actúan sobre la parte de la estructura limitada por la cara dorsal de la sección.

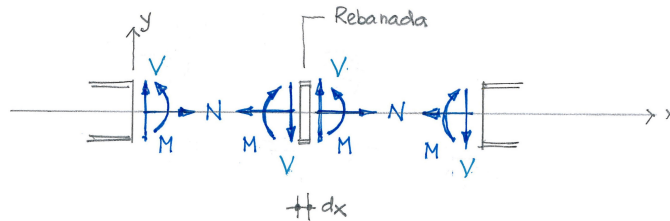


- Definición C.** Los esfuerzos son las componentes de las resultantes de fuerza y de momento de las tensiones que actúan sobre la sección transversal.

Las fuerzas que actúan sobre la cara dorsal son iguales y de sentido opuesto a las que lo hacen sobre la cara frontal. Los dos conjuntos de fuerzas representan el mismo fenómeno: *ambos son representaciones de los esfuerzos*. Por ello los esfuerzos no tienen la misma consideración que las fuerzas y pares exteriores. Las definiciones A y B anteriores se pueden modificar cambiando la palabra *frontal* por *dorsal*, y viceversa, y siguen siendo válidas. Para comprender bien esta idea necesitamos imaginar una rebanada de espesor despreciable de la pieza, aislada del resto de la estructura y representar las fuerzas y momentos que actúan sobre sus caras frontal y dorsal. **Cada pareja de componentes representa un esfuerzo.**

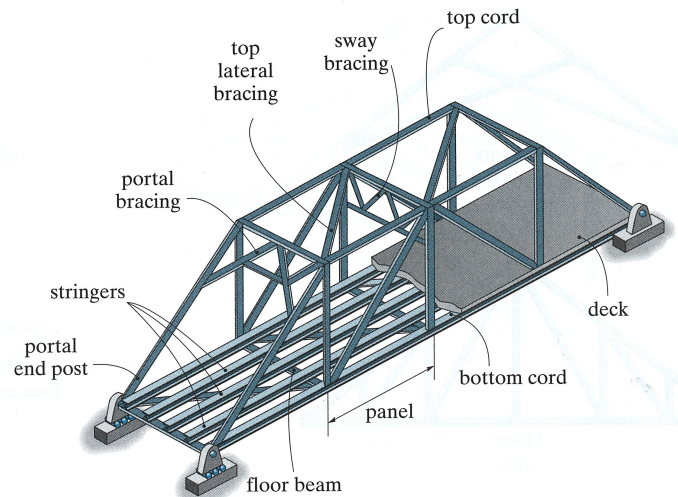


Criterio de signos: Un esfuerzo es positivo cuando actúa en el sentido positivo del eje correspondiente *sobre la cara frontal* de la sección:



2.3. Modelos planos y espaciales

Los sistemas estructurales estudiados en la sección 2.1 pueden tener un funcionamiento plano o espacial. Los **modelos estructurales planos** corresponden a estructuras cuya respuesta se puede considerar plana. Cuando la respuesta de la estructura no es plana, se estudia mediante un **modelo espacial**. Aunque éste es el caso más habitual en la práctica, el estudio de los modelos planos sigue siendo de gran interés, ya que frecuentemente la estructura puede descomponerse a efectos de análisis en varios modelos más sencillos, de modo que las reacciones de unos se introducen como acciones en otros.



Por ejemplo, para estudiar el puente de la figura se puede analizar el piso como un **emparrillado** sobre el que actúan las cargas exteriores (las cargas de tráfico, en este caso). El emparrillado es un sistema espacial en el que las barras están contenidas en un plano y las cargas actúan perpendicularmente a dicho plano. Las reacciones en el emparrillado se introducen a continuación como acciones (de igual magnitud y sentido opuesto al de las reacciones) sobre el modelo plano que representa una de las vigas trianguladas laterales.

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

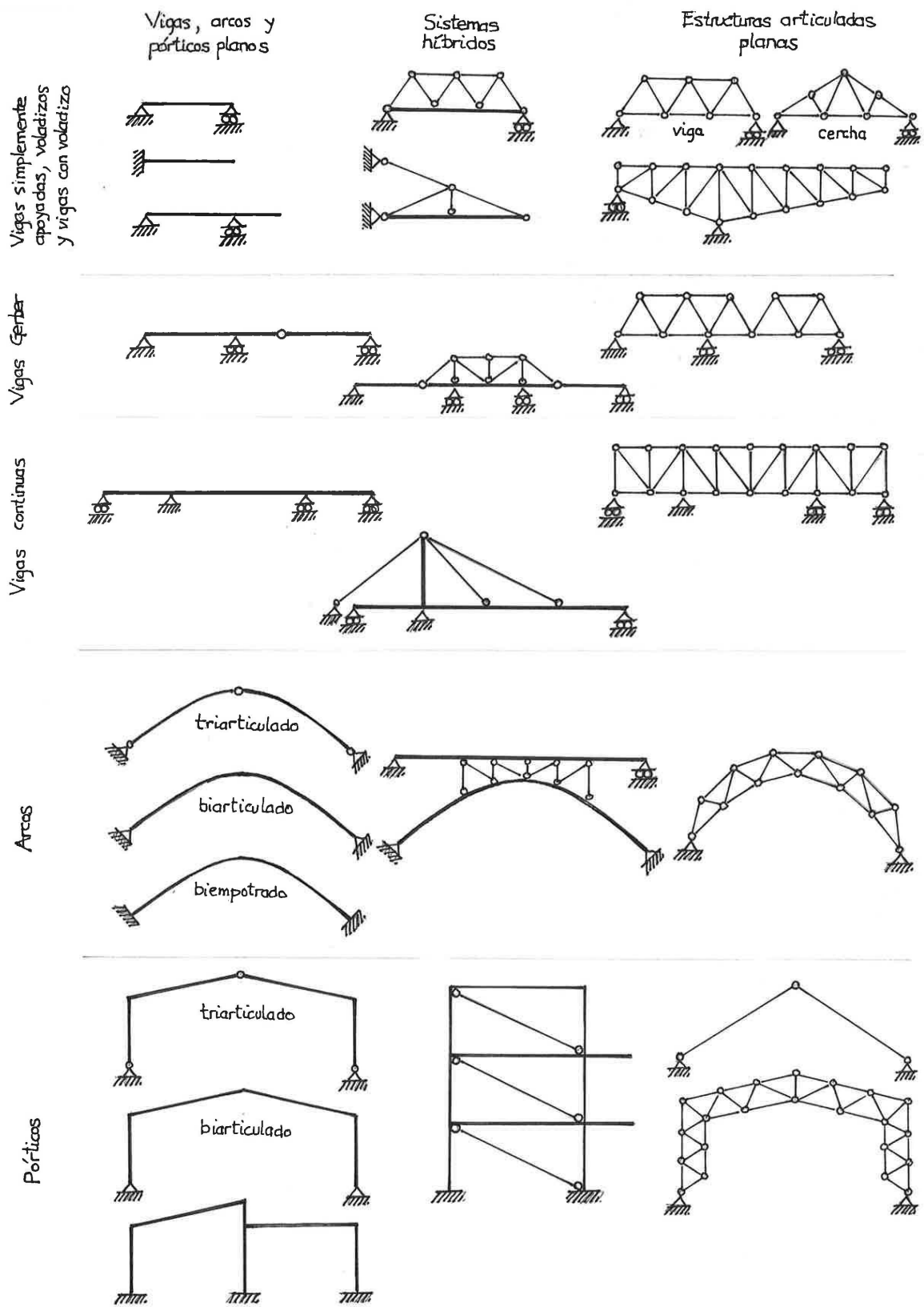


Figura 2.9: Sistemas estructurales planos

2.3.1. Modelos estructurales planos

Un modelo estructural plano es aquel en el que: (a) las directrices de todas las barras están contenidas en un plano (el plano de la estructura), (b) uno de los ejes principales de inercia de las secciones transversales de cada barra está contenido en el plano de la estructura, y (c) las fuerzas y reacciones exteriores están contenidos en el plano de la estructura (en el caso de haber pares, estos deben ser de eje perpendicular al plano de la estructura).

Clasificación

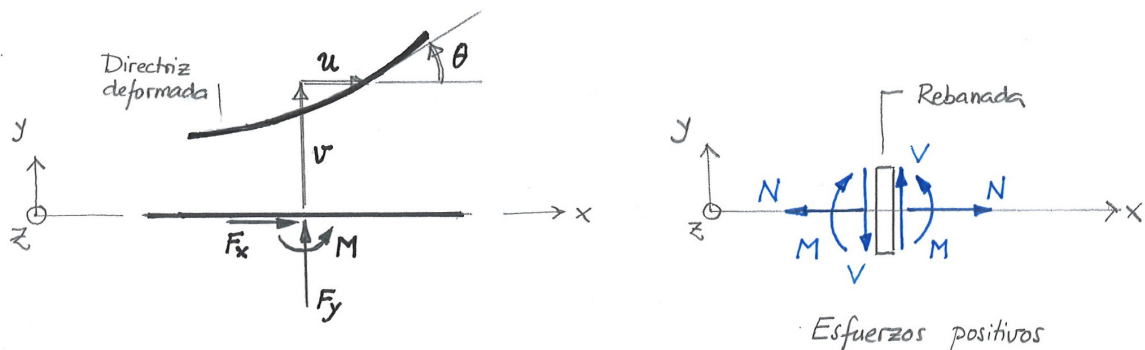
Los modelos planos más habituales son las **vigas, pórticos y arcos planos** y las **estructuras articuladas planas**. La figura 2.9 muestra una clasificación tipológica de modelos planos de estructuras de barras. Las columnas de los lados corresponden a los sistemas con sección activa (vigas, arcos y pórticos) y a los sistemas de vector activo (estructuras articuladas); la columna del centro incluye sistemas híbridos con características presentes en los de sección activa y los de vector activo. Las filas corresponden a los tipos estructurales característicos en la ingeniería civil: vigas simplemente apoyadas, voladizos, vigas Gerber, vigas continuas, arcos triarticulados, biarticulados y biempotrados, y pórticos también con diferentes tipos de sustentación.

Grados de libertad, fuerzas exteriores y fuerzas internas

Los **grados de libertad** de los modelos planos son los desplazamientos en el plano de la estructura y el giro de eje perpendicular a la misma. Generalmente se supondrá que el plano de la estructura es el definido por los ejes x e y , de modo que los tres grados de libertad son u, v, θ_z . El giro se abreviará habitualmente como θ .

Las **fuerzas exteriores** sobre el modelo plano son fuerzas horizontales y verticales, y pares de eje z , como se muestra en la figura. También pueden ser fuerzas y pares distribuidos por unidad de longitud de la barra.

Los **esfuerzos** en las barras de los modelos planos son el axil N , el cortante contenido en el plano de la estructura V y el momento flector de eje perpendicular a la misma M .



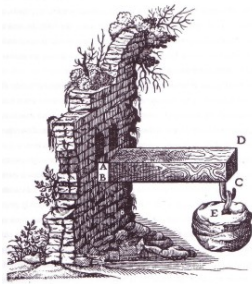
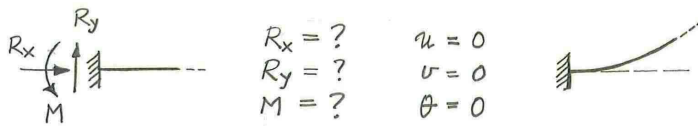
2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

Enlaces

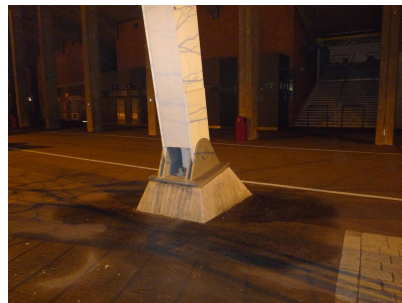
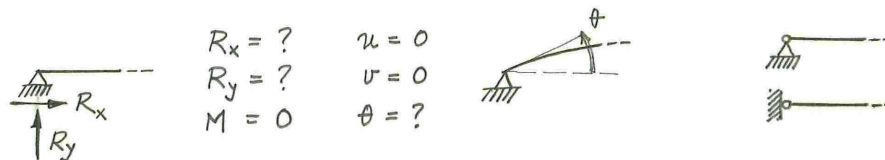
En los modelos planos podemos distinguir los siguientes tipos habituales de enlaces:

Enlaces externos

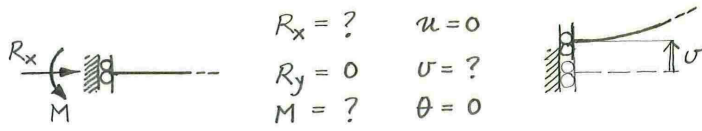
- Empotramiento



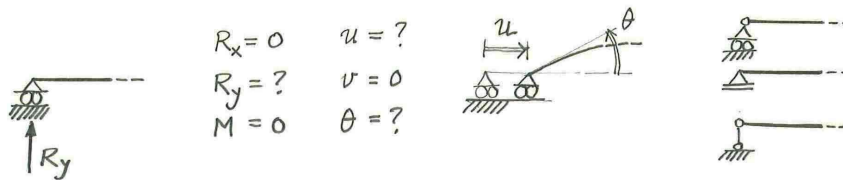
- Apoyo articulado



- Deslizadera

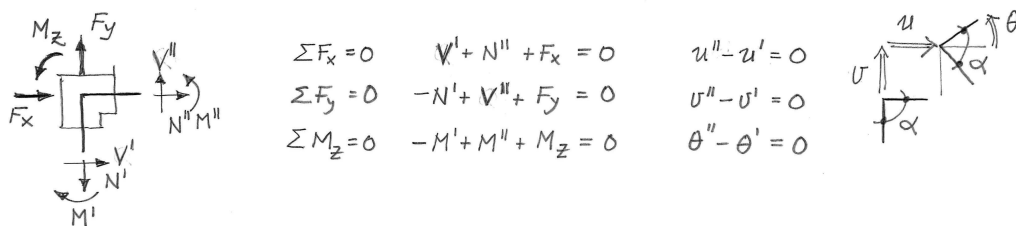


- Carrito (rodillo)

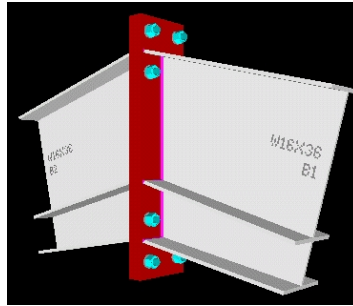


Enlaces internos

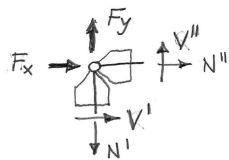
- Nudo rígido



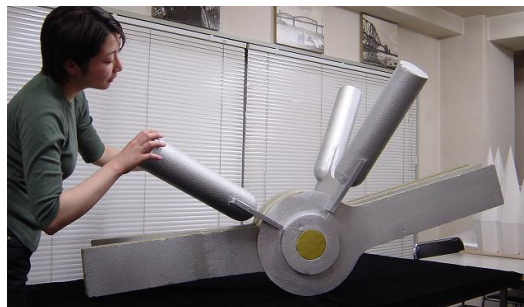
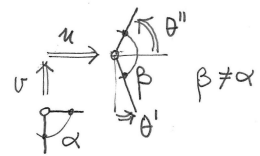
2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES



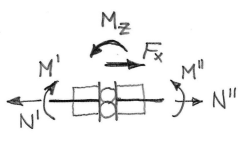
■ Articulación



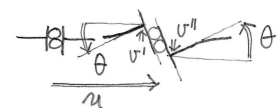
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad V' + N'' + F_x = 0 & \quad u'' - u' = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \quad -N' + V'' + F_y = 0 & \quad v'' - v' = 0 \\ - & & \quad \theta'' \neq \theta' \end{aligned}$$



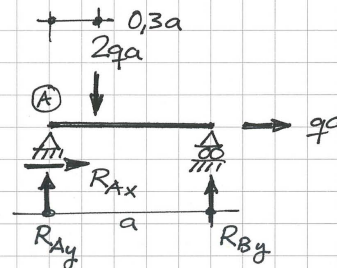
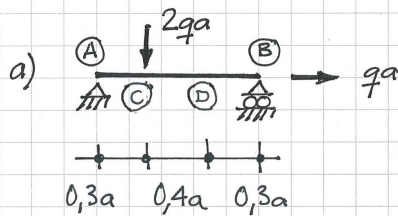
■ Deslizadera



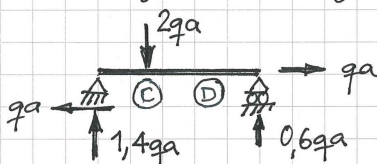
$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad -N' + N'' + F_x = 0 & \quad u'' - u' = 0 \\ - & & \quad v'' \neq v' \\ \Sigma M_z = 0 & \quad -M' + M'' + M_z = 0 & \quad \theta'' - \theta' = 0 \end{aligned}$$



M.2.1 En las estructuras representadas obtener las reacciones y los esfuerzos en las secciones C y D, representándolos sobre un esquema de la rebanada.

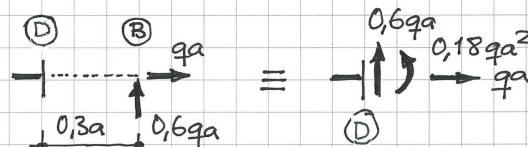


$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad R_{Ax} + qa = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ax} = -qa \\ \sum M_A = 0 \quad -0,3a \cdot 2qa + R_{By} \cdot a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{By} = 0,6qa \\ \sum F_y = 0 \quad R_{Ay} + 0,6qa - 2qa = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{Ay} = 1,4qa \end{aligned}$$

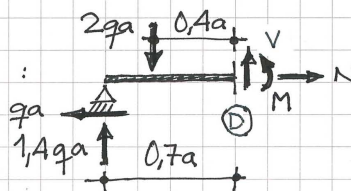


□ Esfuerzos en D

■ Según la definición B :



■ Según la definición A :



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N = qa \quad (\leftarrow || \rightarrow) \\ \sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -0,7a \cdot 1,4qa + 2qa \cdot 0,4a + M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M = 0,18qa^2 \quad (\uparrow || \downarrow) \\ \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1,4qa - 2qa + V = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V = 0,6qa \quad (\downarrow || \uparrow) \end{aligned}$$

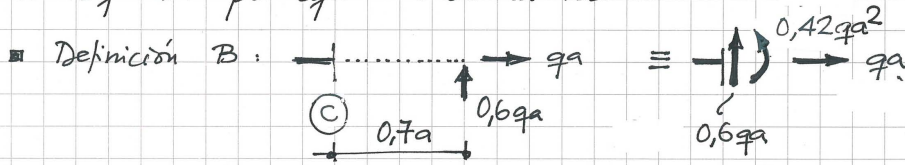
■ Representación en la rebanada

Los resultados obtenidos a partir de las definiciones A y B deben ser idénticos

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

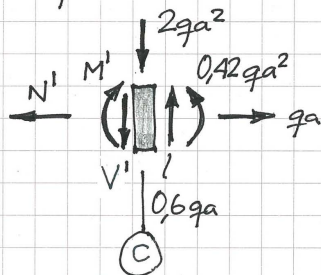
□ Esfuerzos en (C)

Dado que en la sección (C) hay una carga vertical aplicada, los esfuerzos cortantes serán diferentes a uno y otro lado de la misma. Podemos calcularlos por la derecha y obtener los de la izquierda por equilibrio de la rebanada.



Luego $N = qa \leftarrow \rightarrow$; $V = 0,6 qa \downarrow \uparrow$; $M = 0,42 qa^2 (\curvearrowright)$

■ Equilibrio de la rebanada



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0,6 qa - 2qa^2 - Q' = 0$$

$$\hookrightarrow V' = -1,4 qa \quad (\uparrow \downarrow)$$

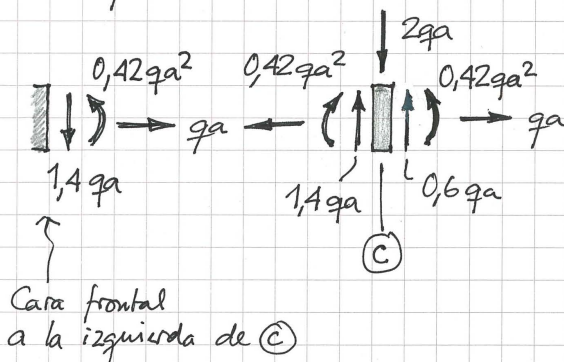
$$\sum M = 0 \Rightarrow M' = 0,42 qa^2 \quad (\curvearrowright)$$

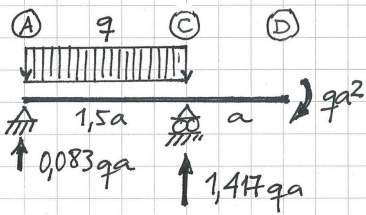
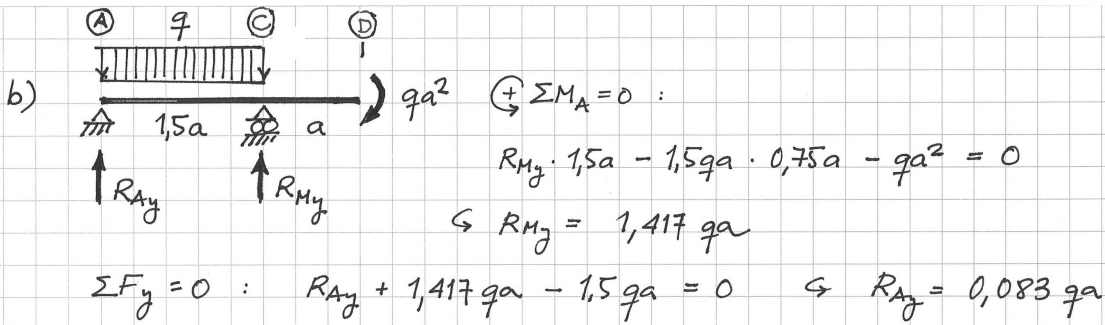
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N' = qa \quad (\leftarrow \rightarrow)$$

Se observa que el valor del esfuerzo cortante cambia a uno y otro lado de la rebanada. La diferencia es precisamente el valor de la carga exterior aplicada en la sección (C):

$$0,6 qa - (-1,4 qa) = 2qa$$

La representación sobre la rebanada es:

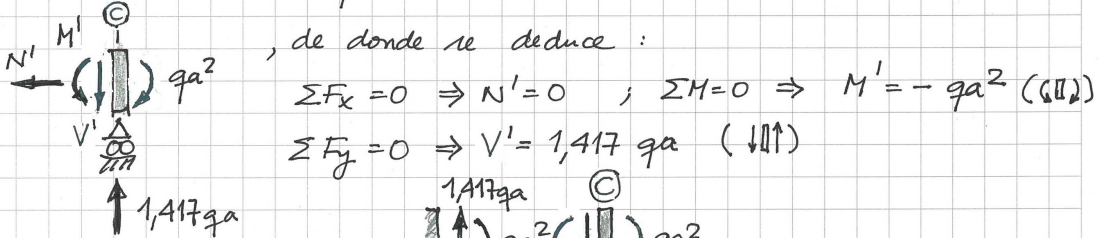




□ Esfuerzos en (C)

Debido a la reacción, los cortantes serán diferentes a uno y otro lado del apoyo. Usando la definición A, es equivalente a con $N=0$ y $V=0$.

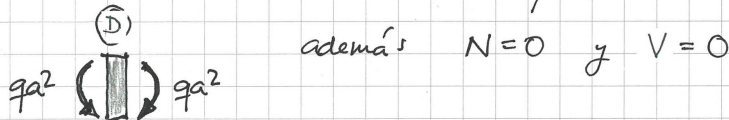
Estableciendo el equilibrio de la rebanada (M) :



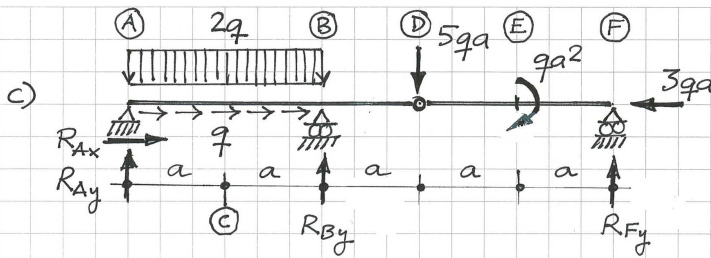
Finalmente resulta: Cara frontal a la izquierda de (C)

□ Esfuerzo en (D)

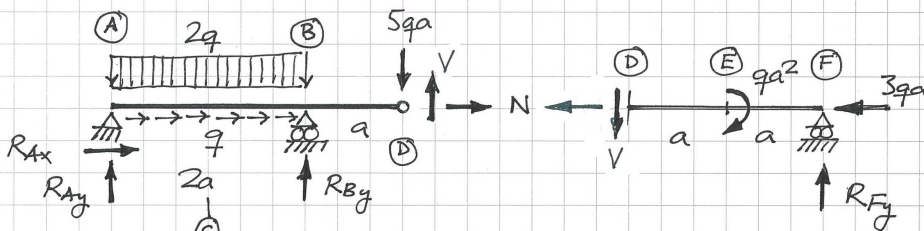
Se trata de un extremo libre, por tanto son de obtención directa:



2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES



Hemos representado las reacciones sobre la figura. Para calcularlas conviene separar la estructura en dos partes. Escogemos la sección justo a la derecha de la articulación (D) para cortar:



La articulación no transmite momentos, por eso únicamente se considera el esfuerzo axial y el cortante como incógnitas en (D)

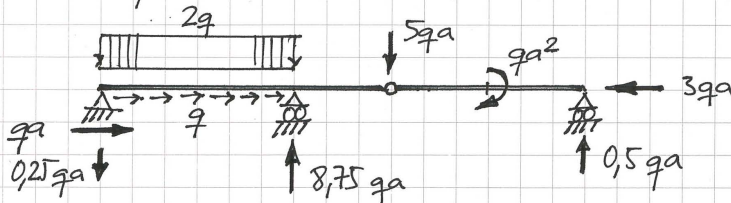
Equilibrio del tramo D-E-F:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &: -N - 3qa = 0 \quad \hookrightarrow N = -3qa \quad (\rightarrow \parallel \leftarrow) \\ \sum M_D = 0 &: -qa^2 + R_{Fy} \cdot 2a = 0 \quad \hookrightarrow R_{Fy} = \frac{1}{2} qa \quad (\uparrow) \\ \sum F_y = 0 &: -V + R_{Fy} = 0 \quad \hookrightarrow V = \frac{1}{2} qa \quad (\downarrow \parallel \uparrow) \end{aligned}$$

Equilibrio del tramo A-B-D

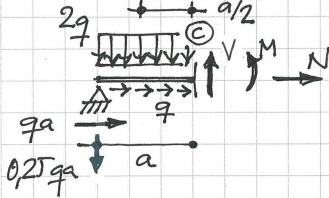
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &: R_{Ax} + q \cdot 2a - 3qa = 0 \quad \Rightarrow R_{Ax} = qa \quad (\rightarrow) \\ \sum M_A = 0 &: -(2q \cdot 2a) \cdot a + 2a \cdot R_{By} - 5qa \cdot 3a + \frac{1}{2} qa \cdot 3a = 0 \\ &\hookrightarrow R_{By} = 8,75 qa \quad (\uparrow) \\ \sum F_y = 0 &: R_{Ay} - 2q \cdot 2a + 8,75 qa - 5qa + \frac{1}{2} qa = 0 \\ &\hookrightarrow R_{Ay} = -0,25 qa \quad (\downarrow) \end{aligned}$$

Representación de las reacciones:



□ Esfuerzos en (C)

En este caso es conveniente usar la definición B



$$\Sigma F_x = 0 : qa + q \cdot a + N = 0 \quad \hookrightarrow N = -2qa \quad (\rightarrow \parallel \leftarrow)$$

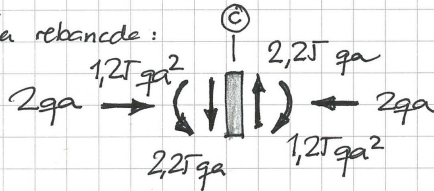
$$\oplus \Sigma M_C = 0 : 0,25qa \cdot a + 2qa \cdot a/2 + M = 0$$

$$\hookrightarrow M = -1,25qa^2 \quad (\curvearrowright)$$

$$\Sigma F_y = 0 : -0,25qa - 2qa + V = 0$$

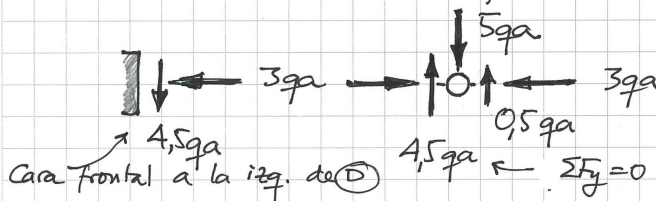
$$\hookrightarrow V = 2,25qa \quad (\downarrow \parallel \uparrow)$$

sobre la rebanada:



□ Esfuerzos en (D)

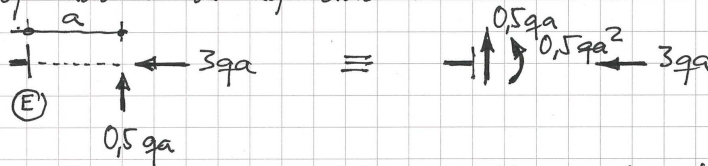
Se había obtenido los esfuerzos en D al calcular las reacciones:



El momento es nulo en la articulación

□ Adicionalmente obtendremos los esfuerzos en (E). Para ello comenzamos cortando por una sección situada inmediatamente a la derecha de (E)

y operando con la definición B



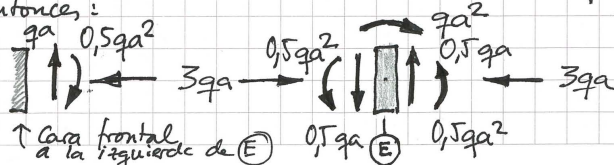
Por equilibrio de la rebanada obtenemos los esfuerzos a la izquierda

$$\Sigma F_x = 0 : -N' - 3qa = 0 \quad \hookrightarrow N' = -3qa \quad (\rightarrow \parallel \leftarrow)$$

$$\Sigma F_y = 0 : -V' + 0,5qa = 0 \quad \hookrightarrow V' = 0,5qa \quad (\downarrow \parallel \uparrow)$$

$$\oplus \Sigma M = 0 : -M' - qa^2 + 0,5qa^2 = 0 \quad \hookrightarrow M' = -0,5qa^2$$

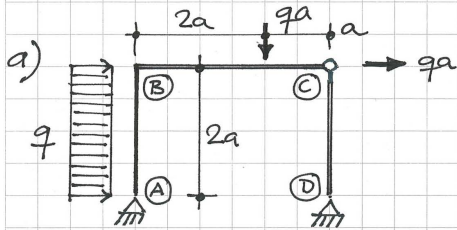
Entonces:



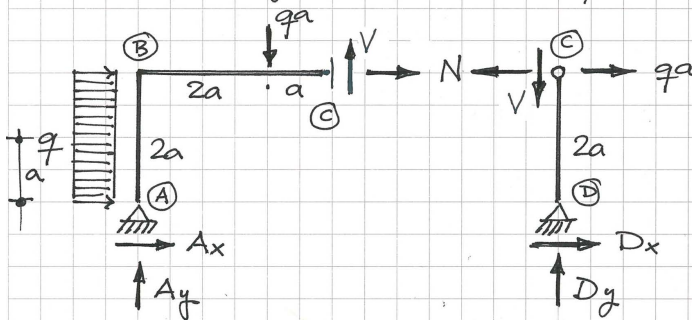
↑ Cara frontal a la izquierda de (E)

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

M.2.2. En las estructuras representadas obtener las reacciones y los esfuerzos en los nudos B y C



Dividimos la estructura en dos partes cortando a la izquierda de la articulación y establecemos el equilibrio de cada parte:



□ Equilibrio del tramo C-D

$$\oplus \sum M_C = 0 \Rightarrow \underline{D_x = 0} ; \sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{N = qa}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \underline{V = D_y = 2qa} \quad (\uparrow)$$

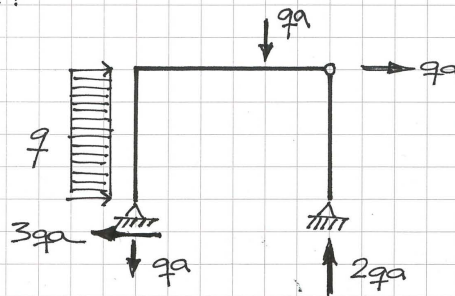
□ Equilibrio del tramo A-B-C

$$\oplus \sum M_A = 0 : -2qa \cdot a - qa \cdot 2a - \overset{N}{qa} \cdot 2a + V \cdot 3a = 0 \quad \hookrightarrow \underline{V = 2qa}$$

$$\sum F_x = 0 : 2qa + qa + A_x = 0 \quad \hookrightarrow \underline{A_x = -3qa} \quad (\leftarrow) \quad (\downarrow \uparrow)$$

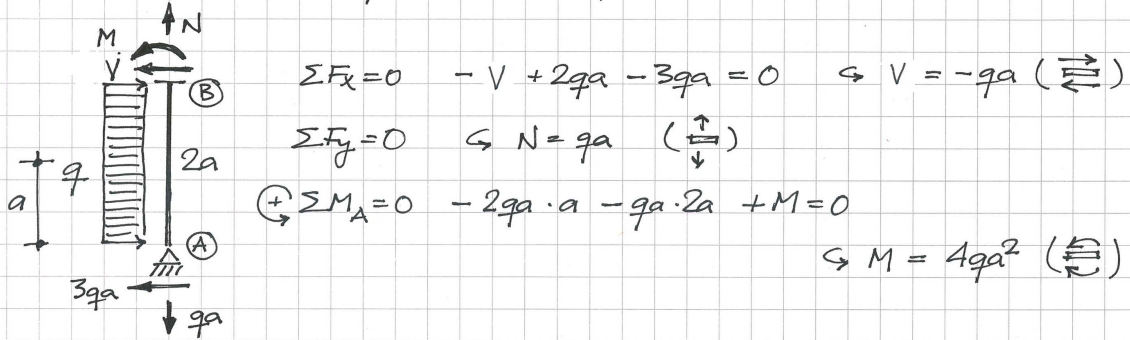
$$\sum F_y = 0 : -qa + 2qa + A_y = 0 \quad \hookrightarrow \underline{A_y = -qa} \quad (\downarrow)$$

Entonces:

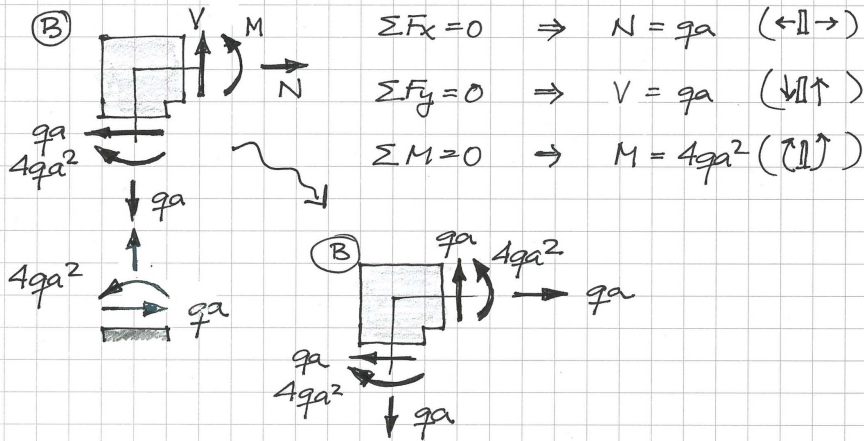


□ Esfuerzos en el nudo (B)

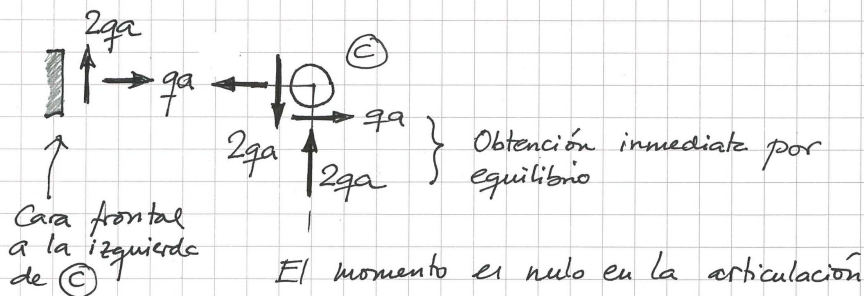
- Obtenemos los esfuerzos en la sección correspondiente a la barra AB empleando la definición A



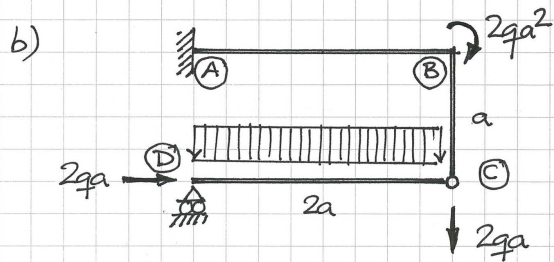
- Equilibrio del nudo (B) para obtener los esfuerzos en la sección correspondiente a la barra BC



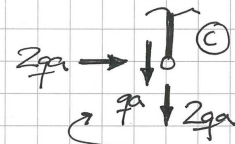
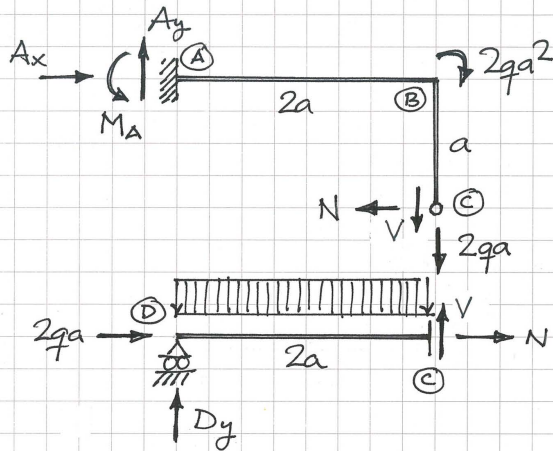
□ Esfuerzos en la articulación (C). Se han obtenido para calcular las reacciones



2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES



Dividiendo la estructura por la izquierda de la sección C :



□ Equilibrio del tramo D-C

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N = -2qa \quad (\rightarrow \parallel \leftarrow)$$

$$\sum M_C = 0 : 2qa \cdot a - D_y \cdot 2a = 0 \quad \Leftrightarrow D_y = qa \quad (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = qa \quad (\uparrow)$$

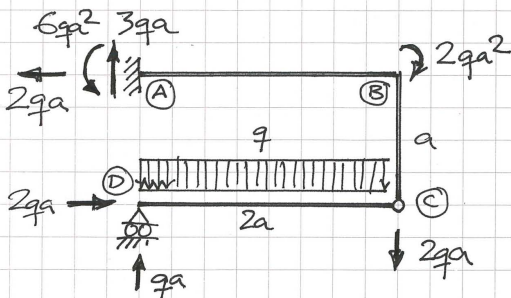
□ Equilibrio del tramo A-B-C

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = -2qa \quad (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 3qa \quad (\uparrow)$$

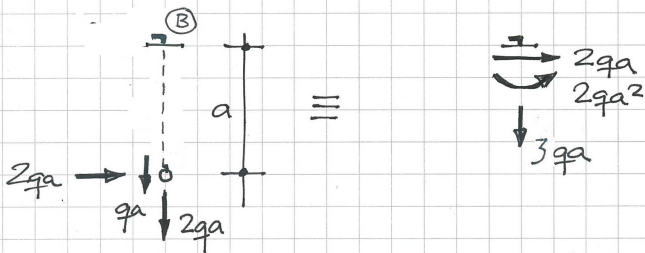
$$\oplus \sum M_A = 0 : M_A - 2qa^2 + 2qa \cdot a - 3qa \cdot 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow M_A = 6qa^2 \quad (\ominus)$$

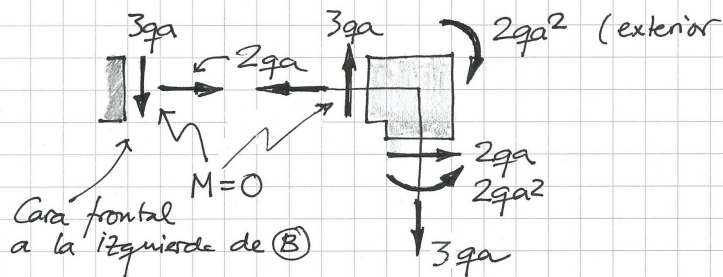


□ Esfuerzos en el nudo (B)

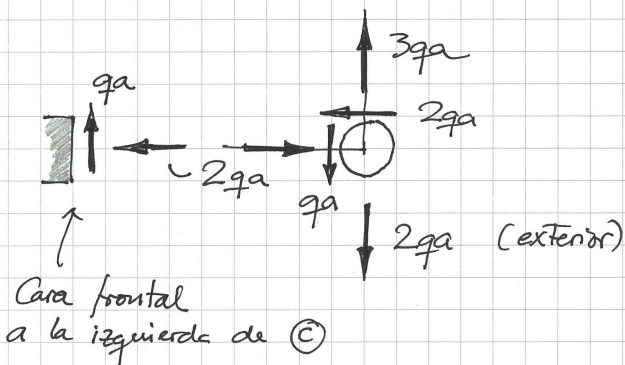
- Esfuerzos en la sección del nudo (B) correspondiente a la barra BC, empleando la definición B:



- Equilibrio del nudo (B)



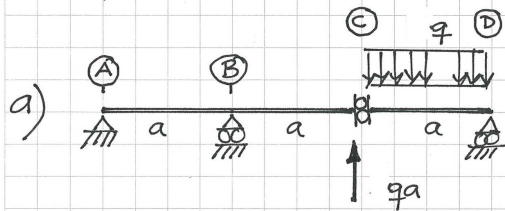
□ Esfuerzos en la articulación (C) (obtenidos antes)



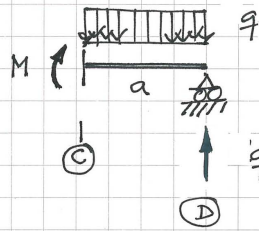
El momento es nulo en la articulación

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES

M 2.3 En las estructuras representadas obtener las reacciones y los esfuerzos en la sección (o nudo) B. y C



□ Separamos por la deslizadera y establecemos el equilibrio del tramo CD

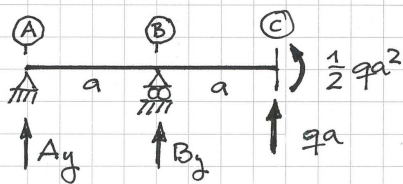


■ Hemos representado directamente la reacción vertical en D (se deduce directamente por equilibrio de fuerzas verticales, ya que en la deslizadera el cortante es nulo)

$$\sum M_C = 0 : -M - qa \cdot \frac{1}{2}a + qa \cdot a = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{2}qa^2 \quad (\uparrow \uparrow)$$

■ No se ha representado esfuerzo axial incógnita en la deslizadera, ya que, por equilibrio de fuerzas horizontales, debe ser nulo.

□ Equilibrio del tramo ABC

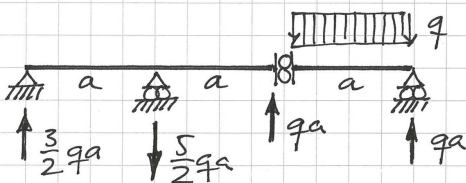


■ Sobre este lado de la deslizadera el cortante no es nulo, ya que hay una fuerza vertical aplicada.

$$\sum M_A = 0 : \frac{1}{2}qa^2 + qa \cdot 2a + a \cdot B_y = 0 \quad \Leftrightarrow B_y = -\frac{5}{2}qa$$

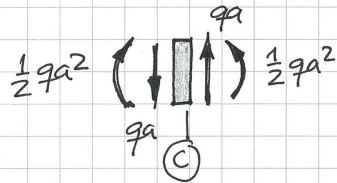
$$\sum F_y = 0 : A_y - \frac{5}{2}qa + qa = 0 \quad \Leftrightarrow A_y = \frac{3}{2}qa$$

Representemos las reacciones:



□ Esfuerzos en la sección C:

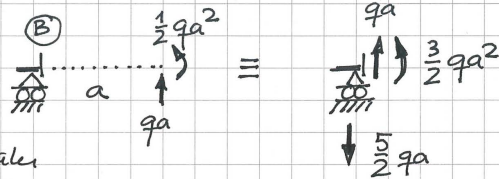
Directamente del cálculo anterior:



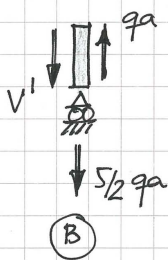
$$\begin{aligned} N &= 0 \\ V &= qa \quad (\downarrow \uparrow \uparrow) \\ M &= \frac{1}{2} qa^2 \quad (\uparrow \uparrow \uparrow) \end{aligned}$$

□ Esfuerzos en la sección B:

Empleando la definición B

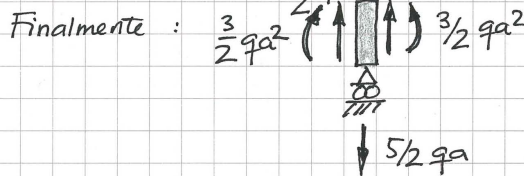


Por equilibrio de fuerzas verticales el cortante en la cara dorsal es:

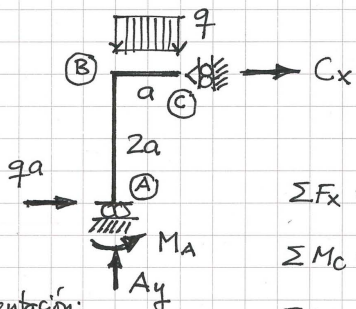


$$-V' - \frac{5}{2} qa + qa = 0$$

$$V' = -\frac{3}{2} qa \quad (\uparrow \downarrow \downarrow)$$



b)

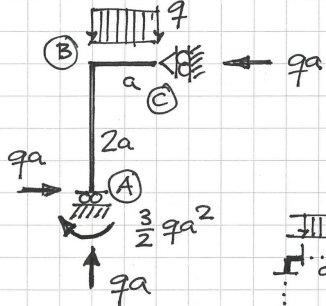


Hemos representado las reacciones incógnitas sobre el dibujo por rapidez

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = -qa$$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_c = 0 : -A_y \cdot a + qa \cdot 2a + M_A + qa \cdot \frac{1}{2} a &= 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y &= qa \end{aligned} \right\} \Rightarrow *$$

Representación:

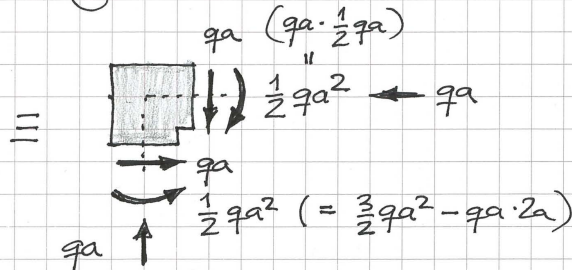


$$* M_A = -\frac{3}{2} qa^2$$

□ Esfuerzos en C:

$$\begin{aligned} N &= -qa \quad (\rightarrow \leftarrow) \\ V &= 0 \\ M &= 0 \end{aligned}$$

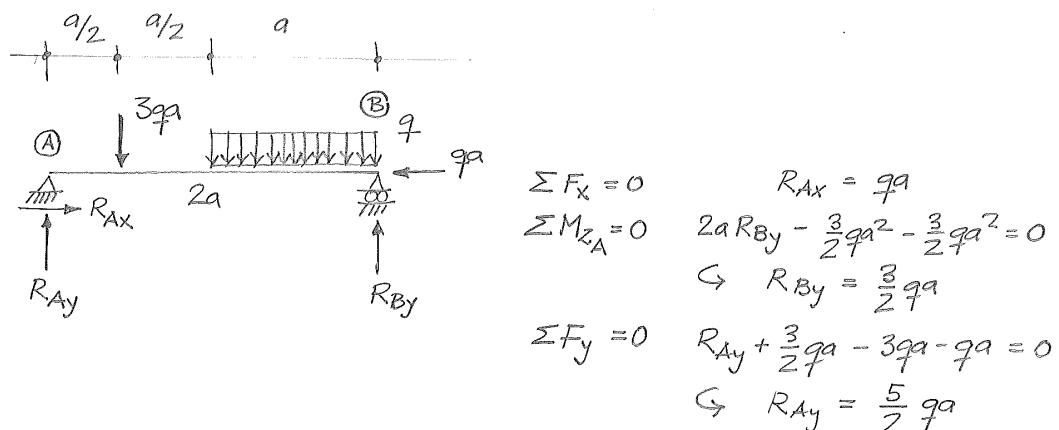
□ Esfuerzos en B:



2.4. Determinación e indeterminación estática

El concepto de *equilibrio* es esencial en el funcionamiento del sistema estructural. La transmisión de las fuerzas exteriores a la cimentación a través de la estructura requiere que cada componente de la misma (barra o nudo en las estructuras formadas por elementos lineales) se encuentre en equilibrio como sólido libre aislado idealmente del resto del sistema. En el establecimiento de este equilibrio intervienen fuerzas y pares exteriores, que generalmente pueden considerarse datos conocidos, y también fuerzas internas (esfuerzos) y reacciones en los apoyos que son *a priori* desconocidas. Cuando estas variables estáticas desconocidas pueden obtenerse como solución (exclusivamente) de ecuaciones de equilibrio, decimos que la estructura es **estáticamente determinada** o **isostática**. En caso contrario, cuando necesitamos ecuaciones adicionales (que ya no son de equilibrio) para obtenerlas, diremos que la estructura es **estáticamente indeterminada** o **hiperestática**, y denominamos *grado de hiperestatismo* o indeterminación al número de reacciones y/o fuerzas internas que no pueden calcularse por medio de ecuaciones de equilibrio.

Consideremos la siguiente viga simplemente apoyada:



Las tres reacciones en los apoyos pueden calcularse a partir de las tres ecuaciones de equilibrio aplicables a la estructura plana. Obviamente, las fuerzas (internas) en los extremos de la barra² se obtienen directamente de las reacciones, así como los esfuerzos en cualquier otra sección de la barra. La estructura es, por tanto, isostática.

Cuando la estructura es más compleja, para analizar el equilibrio podemos separar idealmente sus nudos y barras y considerarlos como sólidos libres. Suponiendo conocidas las fuerzas en los extremos de cada barra, los esfuerzos en cualquier sección se podrían calcular directamente estableciendo el equilibrio del tramo de barra situado entre la sección y uno de sus extremos.

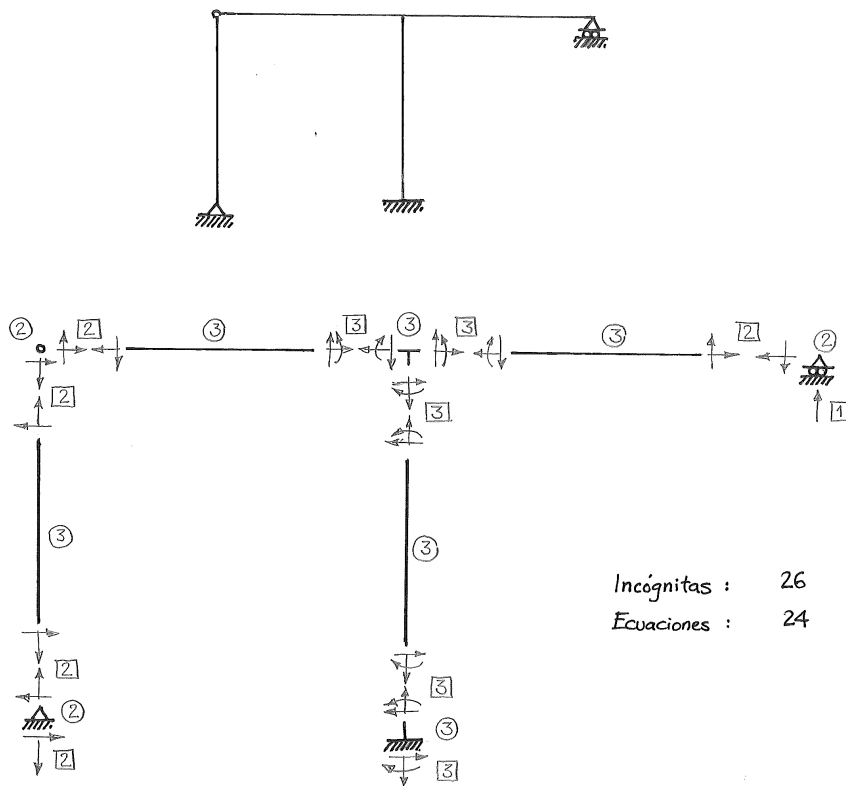
²No hay diferencia conceptual entre fuerzas en extremos de barra y esfuerzos en las secciones extremas de la barra. Sí hay diferencia en los signos de cada componente. En el extremo frontal de la barra las fuerzas son precisamente los esfuerzos sobre la cara frontal de la rebanada extrema de la barra; tienen por tanto el mismo signo. Sin embargo los esfuerzos en los extremos dorsal tienen el mismo valor pero signo opuesto a las fuerzas que actúan sobre el extremo dorsal. Recordemos que un esfuerzo es positivo cuando la componente correspondiente de la fuerza (o momento) que actúa sobre la cara frontal de una rebanada lo hace en el sentido positivo del eje correspondiente.

Por ello, la totalidad de las fuerzas en extremos de barra más la totalidad de las posibles componentes de las reacciones en los apoyos constituyen las incógnitas que pueden plantearse en el análisis estático. Por lo que respecta a las ecuaciones de equilibrio, en cada barra pueden plantearse tres, y en cada nudo tantas como el máximo número de fuerzas en el extremo de cada barra considerando todas las barras que se unen en él³.

Suponiendo que el sistema no es un mecanismo, pueden producirse dos situaciones:

- Cuando el número de incógnitas y el de ecuaciones coincide la estructura es estáticamente determinada o **isostática** (todas las variables estáticas se pueden calcular por equilibrio).
- Si el número de incógnitas es superior al de ecuaciones la estructura es estáticamente indeterminada o **hiperestática**. La diferencia entre incógnitas y ecuaciones es el grado de hiperestatismo. Denominamos **incógnitas hiperestáticas** a las que están en exceso respecto del número de ecuaciones de equilibrio.

En la figura se muestra la división en componentes de una estructura. El número de fuerzas en el extremo de cada barra se ha recuadrado; el número de ecuaciones en cada nudo y cada barra se indica en un círculo. En total hay 26 incógnitas y 24 ecuaciones de equilibrio, por tanto la estructura tiene un grado de hiperestatismo 2 (que denotaremos H2). Este sistema para obtener el grado de indeterminación estática no es el más operativo. En las próximas secciones se proponen otros métodos alternativos.



³Por ejemplo, en los extremos de las barras unidas a un nudo articulado sólo actúan dos componentes de fuerza, por tanto como máximo pueden plantearse dos ecuaciones de equilibrio en cada nudo.

2.4.1. Criterio constructivo para la determinación del grado de hiperestatismo

Alternativamente al método expuesto en el apartado anterior, se puede determinar el grado de hiperestatismo mediante un procedimiento inductivo que proporciona además una visión directa de la estática del sistema estructural. Este procedimiento resultará de gran ayuda para resolver estructuras hiperestáticas por el método de flexibilidad. La idea clave consiste en *construir* idealmente la estructura cuyo grado de hiperestatismo se desea obtener, partiendo de una estructura isostática básica. El procedimiento es el siguiente:

1. Se escoge una parte representativa de la estructura que constituya una estructura isostática básica, por ejemplo, un vano simplemente apoyado, un voladizo, una celda triangulada de una estructura articulada o un pórtico triarticulado.
2. Se añaden elementos que no modifiquen el grado de hiperestatismo de forma tal que la topología vaya aproximándose a la de la estructura objeto de análisis, como voladizos, o dos barras articuladas entre sí y a dos nudos. La estructura resultante en este estadio sigue siendo isostática.
3. Se completa la estructura hasta su topología final añadiendo coacciones y desconexiones. Basta con sumar una incógnita por cada coacción añadida y restar una incógnita por cada nueva desconexión para obtener el grado de hiperestatismo.

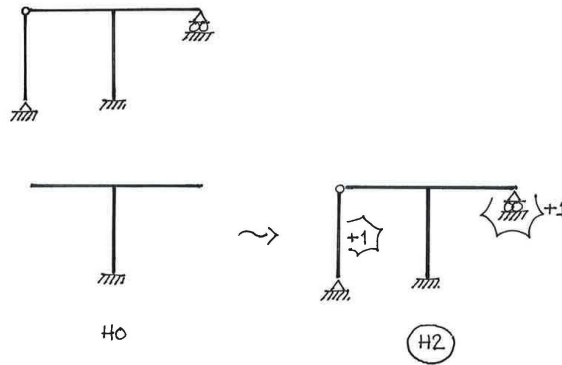
Ejemplos de coacciones:

- Los enlaces externos adicionales añaden tantas reacciones incógnita como coacciones introducen.
- Una barra biarticulada adicional unida a dos nudos existentes supone una incógnita adicional (el axil en la barra).
- Una barra adicional rígidamente unida a un nudo y articulada a otro introduce dos incógnitas adicionales.
- Una barra "biempotrada"(rígidamente unida a nudos en sus extremos) introduce tres incógnitas adicionales.
- La unión rígida de dos extremos libres (o, por ejemplo, de un voladizo a un nudo) añade tres incógnitas en una estructura plana (axil, cortante y flector).
- La unión articulada de dos extremos libres (o de un voladizo a un nudo) añade dos incógnitas (axil y cortante); La unión mediante deslizadera también añade dos (axil y flector).

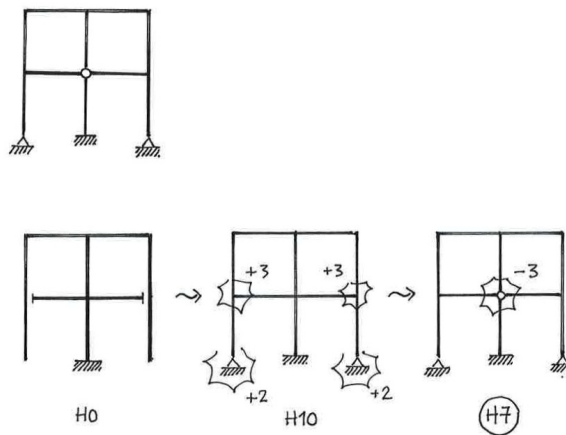
Ejemplos de desconexiones:

- Una articulación o deslizadera en una sección intermedia de una barra disminuye en 1 el número de incógnitas.
- Lo mismo sucede con una articulación o deslizadera en un extremo de barra unida a un nudo rígido.
- La transformación de un nudo rígido en el que convergen n barras en un nudo articulado disminuye en $n - 1$ el número de incógnitas.

Presentamos a continuación dos ejemplos de aplicación de este criterio. El primero de ellos hace referencia a la estructura con la que se introdujo la sección y se puede observar la sencillez operativa en comparación con el método general.



El segundo ejemplo muestra una estructura muy hiperestática que, analizada por el procedimiento general conduciría a una multiplicidad de incógnitas y ecuaciones. La *construcción* paso a paso de la estructura permite comprender directamente el efecto de añadir apoyos, barras o desconexiones en el comportamiento estático de la estructura.

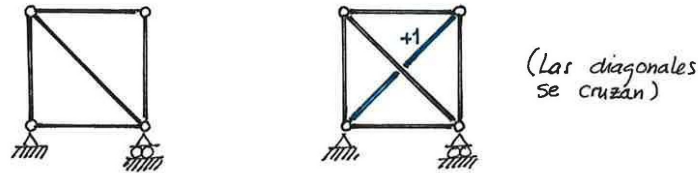


2.4.2. Hiperestatismo interno y externo

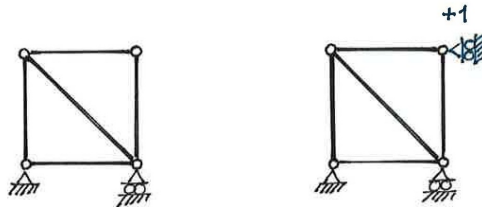
Generalmente podemos discernir entre incógnitas hiperestáticas internas y externas. Consideremos una estructura articulada formada por un recuadro arriostrado mediante una diagonal, vinculado al exterior mediante un apoyo articulado y un carrito. Se trata de una estructura isostática. Si añadimos una segunda diagonal estamos introduciendo una incógnita adicional (la incógnita hiperestática) que convierte la estructura en $H1^4$. En este caso, como la vinculación exterior introduce sólo tres posibles reacciones, podemos calcularlas planteando el equilibrio global de la estructura. Diremos que **la vinculación es isostática** y que el grado de hiperestatismo es interno.

⁴El axil en cualquiera de las barras de la estructura podría escogerse como incógnita hiperestática

2. ESTRUCTURAS FORMADAS POR ELEMENTOS LINEALES



Podemos plantear también un caso complementario en el que un recuadro arriostrado con una sola diagonal se vincula mediante un apoyo articulado y dos carritos al exterior. En este caso una de las componentes de las reacciones será la incógnita en exceso (hiperestática): el hiperestatismo es externo.



Por supuesto pueden darse situaciones en las que parte del hiperestatismo sea interno y parte externo. Esta clasificación tendrá importancia en la aplicación del método de flexibilidad para el análisis de estructuras hiperestáticas, pues éste se fundamenta en una correcta elección de las incógnitas hiperestáticas. Entonces, la identificación de incógnitas externas o internas resulta necesaria.

2.4.3. Mecanismos finitos e infinitesimales (estructuras críticas)

Todos los procedimientos expuestos en las secciones anteriores para obtener el grado de hiperestatismo de un sistema fallan si el sistema es un mecanismo. Por ejemplo, Consideremos la estructura articulada isostática de la izquierda. Si trasladamos una de las diagonales de un recuadro al otro, automáticamente convertimos el sistema en un mecanismo, *aunque el número de ecuaciones e incógnitas sigue siendo idéntico*. Evidentemente ya no estamos ante una estructura isostática, sino ante un mecanismo con un grado de libertad.



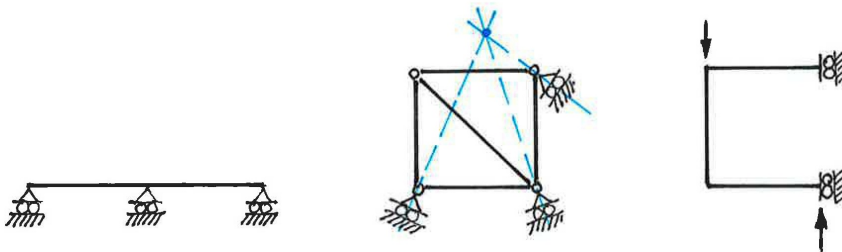
Otro caso, menos evidente, es el de dos barras alineadas articuladas entre si y vinculadas mediante apoyos articulados al exterior. También estamos ante una estructura que aunque

cumple el criterio para ser isostática, es realmente un mecanismo con un grado de libertad⁵. En este caso se trata de un *mecanismo infinitesimal* ya que una vez se ha producido un movimiento suficiente el sistema deja de funcionar como mecanismo, aunque queda sometido a grandes esfuerzos. Denominamos **estructuras críticas** a este tipo de mecanismos.



Otra situación en la que la comparación del número de incógnitas y ecuaciones no conduce a un resultado correcto se produce cuando la vinculación exterior, aun estando compuesta por tres o más reacciones, permite un movimiento de sólido rígido, sea infinitesimal o finito (por ejemplo, una sustentación mediante carritos cuyas normales a los planos de deslizamiento intersecten en un punto). Este caso puede aparecer como consecuencia de la simplificación de la estructura por simetría (se estudiará más adelante). Se puede por tanto dar el caso de una estructura que globalmente sea un mecanismo y a la vez sea estáticamente indeterminada. La estructura de la derecha es un ejemplo típico: se encuentra en equilibrio bajo la acción de las fuerzas exteriores. La ecuación de suma de fuerzas verticales no permite calcular ninguna reacción, por lo tanto sólo quedan dos ecuaciones para determinar las cuatro reacciones en los apoyos, luego la estructura es H2⁶. Empleando el mismo razonamiento se llega a la conclusión de que el mecanismo de la izquierda es un sistema H1 y el del centro es isostático.

El *grado de indeterminación estática* es, por tanto, un concepto no ligado directamente al *grado de indeterminación cinemática* o grado de mecanismo de un sistema estructural.



⁵Obsérvese que no es posible equilibrar una fuerza vertical aplicada en la articulación

⁶Otra forma de entender esto es analizar una estructura similar en la que el apoyo de arriba se ha sustituido por un empotramiento. La ecuación de equilibrio de fuerzas verticales conduce a que la reacción vertical en el empotramiento es nula (por tanto funciona como la deslizadera). Evidentemente, este nuevo pórtico sustentado mediante un empotramiento y una deslizadera, que funciona como la estructura con dos deslizaderas del dibujo, es H2.

Ecuaciones de equilibrio y diagramas de esfuerzos

Para dimensionar las barras de una estructura y comprobar la seguridad de cada una de sus secciones es necesario conocer el valor de los esfuerzos (fuerzas internas) que las solicitan. En el tema 2 se estudió cómo calcular el valor de los esfuerzos en secciones aisladas de la viga. No obstante, en la práctica es necesario conocer no sólo valores aislados sino el modo en el que los esfuerzos cambian a lo largo de los elementos estructurales. Los valores de los esfuerzos pueden representarse mediante expresiones matemáticas que denominamos *leyes de esfuerzos*, que se obtienen planteando el equilibrio del tramo correspondiente de la viga. La representación de estas leyes para cada uno de los esfuerzos se denomina *diagrama de esfuerzos* y permite visualizar qué secciones de cada barra son las más solicitadas.

Las leyes de esfuerzos y las expresiones que definen las cargas exteriores están relacionadas entre sí a través de las *ecuaciones de equilibrio* de la barra. En los ejemplos se puede comprobar que las ecuaciones de equilibrio facilitan la representación *a estima* de los diagramas de esfuerzos.

3.1. Ecuaciones de equilibrio de la viga

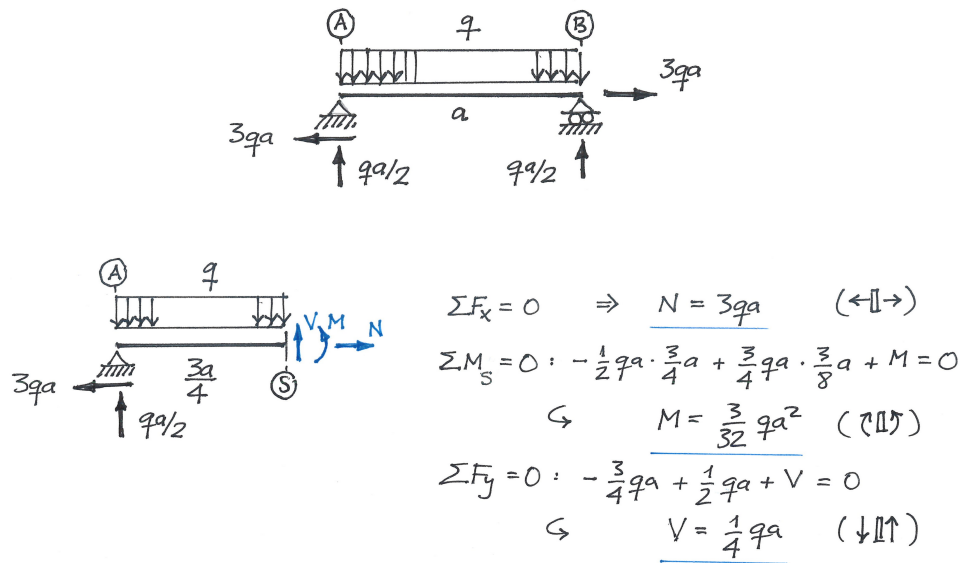
3.1.1. Ecuaciones de equilibrio de la viga en modelos planos

Consideramos en primer lugar los denominados problemas planos, es decir, aquellos problemas que pueden estudiarse mediante un modelo plano, en el sentido definido en la sección 2.3.1. Recordemos que en este caso todas las fuerzas exteriores (y también las reacciones) están contenidas en el plano del problema¹. En la figura siguiente se muestra una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniforme y a una fuerza de tracción aplicada en el extremo de la derecha.

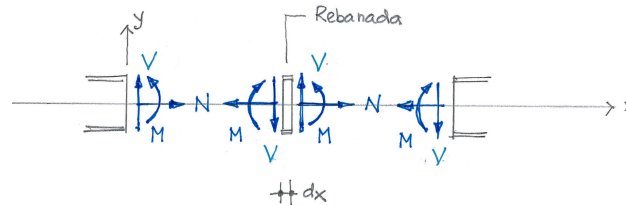
Si calculamos las reacciones y aislamos la parte de la viga situada a la izquierda de la sección definida, por ejemplo, por la coordenada $x = 3a/4$ (sección S), es inmediato observar que, para que exista equilibrio, es necesario que sobre la sección S aparezcan las fuerzas internas N y V en la dirección de la directriz y en la dirección perpendicular, respectivamente, así como un momento interno M sobre la sección. Su valor se obtiene directamente estableciendo el equilibrio de fuerzas y momentos de esa parte de la estructura (esta es precisamente la definición A de esfuerzo que se introdujo en la sección 2.2):

¹Obsérvese que los pares exteriores en los problemas planos son consecuencia de fuerzas contenidas en el plano del problema

3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

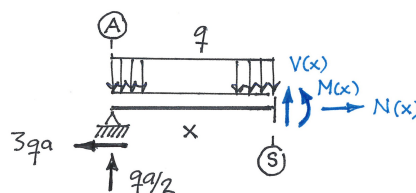


Las fuerzas internas sobre la sección de corte son, en virtud de la definición A incluida en 2.2.3, los **esfuerzos asociados a los problemas planos**: el **esfuerzo axial** N y el **esfuerzo cortante** V , ambos con dimensiones de fuerza, contenidos en el plano del problema, y el **momento flector** M , con dimensiones de fuerza por distancia. Los sentidos positivos de los esfuerzos responden al siguiente criterio:



Es conveniente recordar que consideramos **positivo** un esfuerzo, **cuando sobre la cara frontal de la rebanada actúa en el sentido positivo del eje correspondiente**. Esto también es válido para el momento flector, si lo representamos como vector.

Consideremos un sistema de referencia asociado a la viga en el que el eje x coincide con la directriz de la viga y el eje y está contenido en el plano del problema.

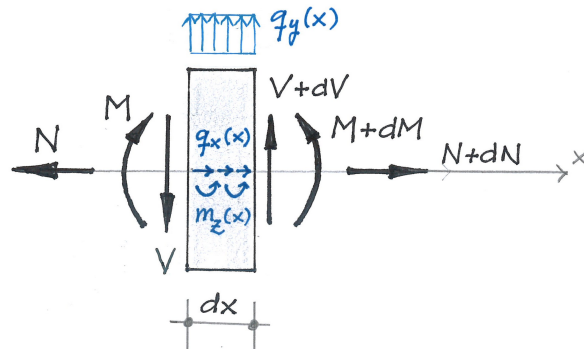


Establecemos de nuevo el equilibrio de una parte de la viga, pero ahora lo haremos cortando idealmente por una sección genérica situada a una distancia x del origen. Planteando el equilibrio del tramo de viga (es decir, aplicando la definición A de esfuerzo) obtenemos tres funciones $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$ que denominamos **leyes de esfuerzos**:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 : & \quad N(x) - 3qa = 0 & \Rightarrow N(x) = 3qa \\ \Sigma M_S = 0 : & \quad -\frac{1}{2}qa x + \frac{1}{2}qx^2 + M(x) = 0 & \Rightarrow M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}qa x \\ \Sigma F_y = 0 : & \quad -qx + \frac{1}{2}qa + V(x) = 0 & \Rightarrow V(x) = qx - \frac{1}{2}qa \end{aligned}$$

Las leyes de esfuerzos proporcionan toda la información sobre el modo en el que los esfuerzos cambian a medida que avanzamos sobre la directriz. Sin embargo, en la práctica, no suele ser necesario obtenerlas, ya que basta conocer el valor de los esfuerzos en un conjunto suficiente de secciones y la forma de la ley entre ellas. Además, las leyes pueden presentar saltos (discontinuidad de la función) y quiebros (discontinuidad de su derivada), por lo que su obtención analítica puede llegar a ser laboriosa y poco práctica. En estructuras formadas por barras con distintas orientaciones es necesario definir un sistema de referencia local en cada barra, en función del cual se expresarán las leyes. Como la elección del sistema de referencia de la barra es arbitraria, podemos tener distintas funciones (correspondientes a distintos sistemas de referencia) que representan una misma solución.

Por lo expuesto antes, en general evitaremos la obtención de las expresiones analíticas de los esfuerzos con el fin de lograr la máxima eficiencia en la resolución de los problemas. Para ello necesitaremos manejar las **ecuaciones de equilibrio de la viga** que describen la relación entre esfuerzos y cargas exteriores, y se deducen a continuación. Para obtenerlas, establecemos el equilibrio de una rebanada aislada de la viga, cuya directriz suponemos alineada con el eje x . Sobre la viga actúan cargas repartidas en la dirección de la directriz $q_x(x)$ y en la dirección perpendicular $q_y(x)$. También puede actuar un par por unidad de longitud $m_z(x)$. Sobre la cara dorsal de la rebanada actúan los esfuerzos N , V y M (omitimos la dependencia de x para simplificar la notación). Sobre la cara frontal los esfuerzos habrán experimentado un cambio diferencial, de modo que las fuerzas y momentos que actúan sobre la rebanada son:



$$\begin{aligned}
 + \rightarrow \quad \Sigma F_x = 0 & : & -N + q_x(x) dx + N + dN = 0 \\
 + \rightarrow \quad \Sigma F_y = 0 & : & -V + q_y(x) dx + V + dV = 0 \\
 + \circlearrowleft \quad \Sigma M_z = 0 & : & -M + m_z(x) dx - q_y(x) dx^2/2 + V dx + M + dM = 0.
 \end{aligned}$$

Se ha tomado momentos en la cara frontal de la rebanada.

Despreciando infinitésimos de segundo orden y operando se obtienen las **ecuaciones de equilibrio de la viga recta en problemas planos**,

$$\frac{dN}{dx} = -q_x(x) \quad (3.1a)$$

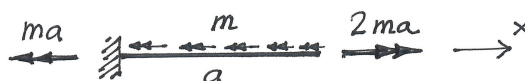
$$\frac{dV}{dx} = -q_y(x) \quad (3.1b)$$

$$\frac{dM}{dx} = -V - m_z(x). \quad (3.1c)$$

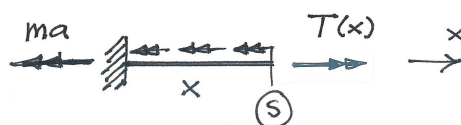
La ecuación (3.1a) describe la parte del equilibrio relacionada con la *extensión* de la viga. Las ecuaciones (3.1b) y (3.1c) establecen las condiciones para el equilibrio relacionado con la *flexión* de la pieza. Decimos que el problema de extensión y el de flexión están desacoplados, porque las variables que describen cada problema no aparecen en las ecuaciones correspondientes al otro. Sin embargo, dentro del problema de flexión, observamos que el cortante aparece en ambas ecuaciones, lo que indica que momento flector y esfuerzo cortante no serán independientes en un mismo problema. Por último cabe destacar que en la mayor parte de los problemas no actúan pares repartidos por unidad de longitud $m_z(x)$; no obstante los hemos incluido para que el resultado sea completo.

3.1.2. Ecuaciones de equilibrio de una barra sometida a torsión

Analizamos este caso como paso previo a la deducción de las ecuaciones en el caso tridimensional. Consideremos, por ejemplo, una barra empotrada en un extremo y libre en el otro alineada con el eje x . Suponemos que actúa un par por unidad de longitud m a lo largo de la barra en el sentido indicado en el dibujo (m tiene dimensiones [FL/L]); además, sobre el extremo libre se aplica un par de eje x en sentido positivo de valor $2ma$. Denominamos **par torsor** (distribuido o puntual) a este tipo de acción, puesto que tiende a producir la **torsión** de la barra. En el empotramiento debe actuar un par reacción de valor ma en el sentido indicado, que se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio de momentos de eje x .



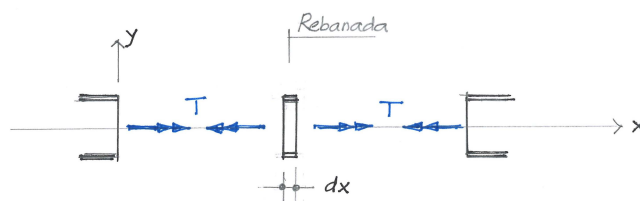
Cortando por una sección S a una distancia x del origen (que tomamos en el empotramiento), observamos que para que haya equilibrio, es necesaria la actuación de un momento de eje x que denotamos $T(x)$ denominado **momento torsor**.



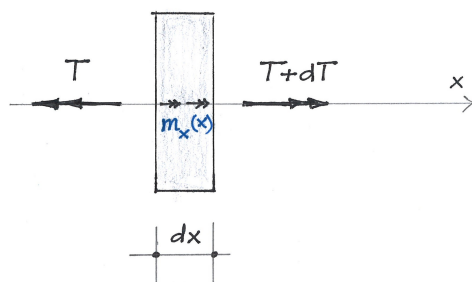
Su valor se calcula mediante la ecuación de equilibrio de momentos de eje x :

$$\Sigma M_x = 0 : \quad T(x) - ma - mx = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = mx + ma$$

La función $T(x)$ es la **ley de momentos torsores** de la barra sometida a las acciones indicadas en la figura anterior. Adoptamos como criterio positivo el indicado en la figura.



Como en el apartado precedente, nos interesa obtener la ecuación que relaciona los pares exteriores con los momentos torsores. Para ello se plantea el equilibrio de momentos de eje x de una rebanada; en él interviene el momento torsor (que experimenta un incremento diferencial al avanzar sobre la rebanada), así como el par torsor distribuido $m_x(x)$ con el valor correspondiente a la sección considerada:



$$\Sigma M_x = 0 : \quad -T + m_x(x) dx + T + dT = 0$$

Operando se obtiene la **ecuación de equilibrio de la barra sometida a torsión**.

$$\frac{dT}{dx} = -m_x(x). \quad (3.2)$$

Esta ecuación es formalmente análoga a la ecuación de equilibrio de esfuerzos axiales. Además está desacoplada del resto (ninguno de los otros esfuerzos interviene en ella)².

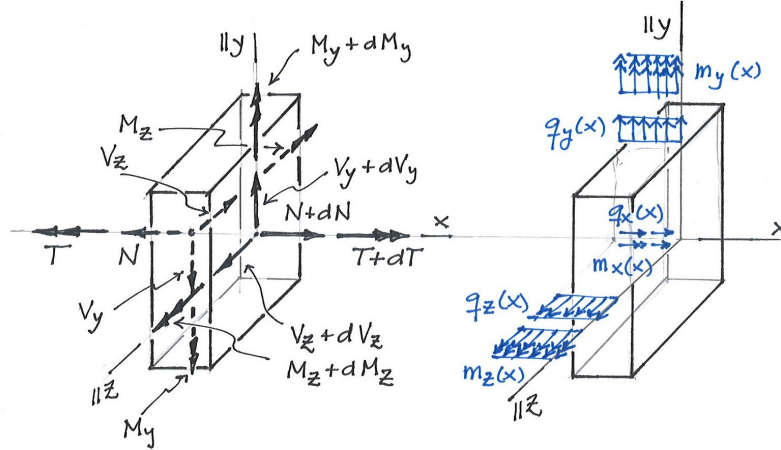
3.1.3. Ecuaciones de equilibrio de la viga recta. Caso general

En el caso general, sobre una rebanada de viga en un modelo espacial actúan seis esfuerzos: tres componentes de fuerza (axil N y cortantes en las direcciones y y z : V_y , V_z), y tres componentes de momento (momento torsor T y momentos flectores de ejes y y z : M_y , M_z). Además,

²Estrictamente, para que la ecuación de equilibrio de torsión esté desacoplada del resto es necesario que se cumplan determinadas condiciones relacionadas con la geometría de la sección transversal y de la barra, cuyo estudio queda fuera del alcance de este curso. En la mayor parte de los casos sencillos se puede admitir el desacoplamiento. No así en vigas curvas o en el análisis de ciertos tableros de puente.

3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

en el equilibrio de la rebanada intervienen también (i) las cargas exteriores distribuidas, que en componentes son: cargas distribuidas a lo largo de la directriz $q_x(x)$ y cargas perpendiculares distribuidas $q_y(x), q_z(x)$, todas de dimensiones $[F/L]$ y (ii) los pares exteriores distribuidos: pares torsores distribuidos $m_x(x)$ y pares de eje y y z , $m_y(x), m_z(x)$, de dimensiones $[FL/L]$.



En el planteamiento del equilibrio de la rebanada elemental es necesario considerar incrementos infinitesimales de los esfuerzos sobre la cara frontal, del mismo modo que se ha hecho en el caso plano y en el de torsión. Para simplificar el dibujo se ha representado una sección rectangular. Las únicas ecuaciones que restan por plantear son:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = 0 : & \quad -V_z + q_z(x) dx + V_z + dV_z = 0 \\ \Sigma M_y = 0 : & \quad -M_y + m_y(x) dx + q_z(x) dx^2/2 - V_z dx + M_y + dM_y = 0 \end{aligned}$$

Despreciando infinitesimales de segundo orden y operando obtenemos dos ecuaciones a las que añadimos las cuatro obtenidas antes (teniendo en cuenta que los esfuerzos del caso plano son $M = M_z$ y $V = V_y$). De este modo resultan las seis **ecuaciones de equilibrio de la viga en el espacio**:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x(x) \quad (3.3a)$$

$$\frac{dV_y}{dx} = -q_y(x) \quad (3.3b)$$

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z(x) \quad (3.3c)$$

$$\frac{dT}{dx} = -m_x(x) \quad (3.3d)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z - m_y(x) \quad (3.3e)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -V_y - m_z(x) \quad (3.3f)$$

Como se ha indicado antes, los problemas de extensión y torsión están desacoplados del resto (y entre sí). Además los problemas de flexión se pueden también tratar por separado, de modo que las ecuaciones del caso general pueden separarse en los siguientes casos elementales³:

³Esta idea se desarrollará en el tema 8.1

- Problema de extensión

$$\frac{dN}{dx} = -q_x(x)$$

- Problema de torsión

$$\frac{dT}{dx} = -m_x(x)$$

- Problema de flexión en el plano xy

$$\frac{dV_y}{dx} = -q_y(x)$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -V_y - m_z(x)$$

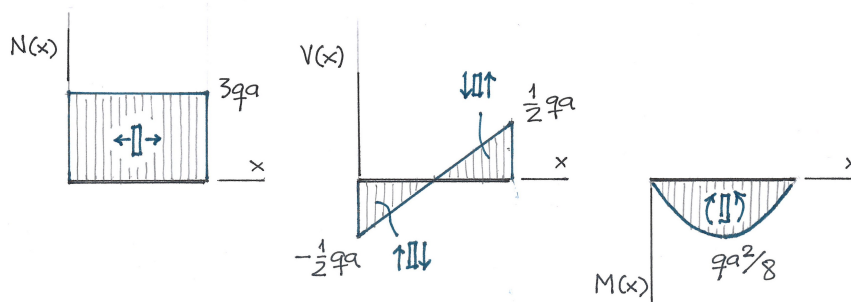
- Problema de flexión en el plano xz

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z(x)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z - m_y(x)$$

3.2. Diagramas de esfuerzos en problemas planos

Volviendo al caso plano analizado al principio de la sección anterior, podemos representar gráficamente las leyes de esfuerzos obtenidas como funciones de x . Estas representaciones se denominan **diagramas de esfuerzos**.



Criterios para la representación de diagramas en vigas

Para la representación de esfuerzos en vigas simplemente apoyadas o continuas se adopta el siguiente criterio: El esfuerzo axil y el esfuerzo cortante se representan por encima de la viga cuando son positivos. El momento flector positivo se representa, sin embargo, por debajo⁴. Si pensamos en la representación de una función diríamos que, en el caso del axil y el cortante, el eje de ordenadas apunta hacia arriba, y en el caso del flector hacia abajo.

⁴El motivo de adoptar este criterio es histórico y tiene que ver con la relación entre el momento flector y la curvatura de la viga: resulta más intuitivo imaginar cómo es la curvatura de la viga representando el flector con este criterio.

Además de acotar los diagramas anotando su valor en secciones representativas, es necesario indicar mediante el símbolo correspondiente el signo de cada esfuerzo. Se suele también rellenar el diagrama con una trama de rayas perpendiculares a la barra para facilitar su interpretación.

Obtención de los diagramas de esfuerzos a partir de las ecuaciones de equilibrio

Como se ha indicado en la sección anterior, la obtención explícita de las leyes de esfuerzos para la representación de los diagramas no es el procedimiento más operativo. Vemos a continuación que las ecuaciones de equilibrio (3.1) proporcionan un método práctico para la representación de diagramas de esfuerzos ya que permiten obtener conclusiones relativas a la forma del diagrama.

Consideremos por ejemplo la ecuación (3.1a): si el término correspondiente a la fuerza repartida $q_x(x)$ es nulo en un tramo de la viga, entonces podemos afirmar que el esfuerzo axial $N(x)$ será constante en el tramo, ya que su derivada es nula. Del mismo modo, este resultado puede extrapolarse a los casos más habituales en los que $q_x(x)$ es constante, lineal o cuadrática en x . El esfuerzo axial se expresará entonces mediante un polinomio cuyo grado será superior en 1 al de la carga repartida. Esta idea se puede extender a las otras ecuaciones de equilibrio. En términos prácticos esta conclusión se traduce en el siguiente **procedimiento** para representar diagramas de esfuerzos:

1. En primer lugar se calculan las **reacciones** en los apoyos de la estructura.
2. A continuación se representa el **valor de los esfuerzos en aquellas secciones en las que son conocidos** directamente. Por ejemplo, en un extremo libre sobre el que no actúan cargas los esfuerzos son nulos; si actúan cargas, cada componente no nula corresponderá a un determinado esfuerzo cuyo signo deberá determinarse mediante el criterio expuesto en las secciones previas.

En el ejemplo anterior, en la sección B, $N = 3qa$ (igual al valor de la fuerza aplicada), $V = qa/2$ (igual al valor de la reacción vertical) y $M = 0$ (en un carrito el giro es libre y por tanto el momento es nulo si no hay un par exterior aplicado). Obsérvese que se ha tenido en cuenta el sentido de las fuerzas para determinar los signos de los esfuerzos (en este caso son positivos porque las fuerzas actúan en sentido positivo sobre la cara frontal de la sección B). Empleando los mismos razonamientos, en la sección A, $N = 3qa$, $V = -qa/2$ y $M = 0$.

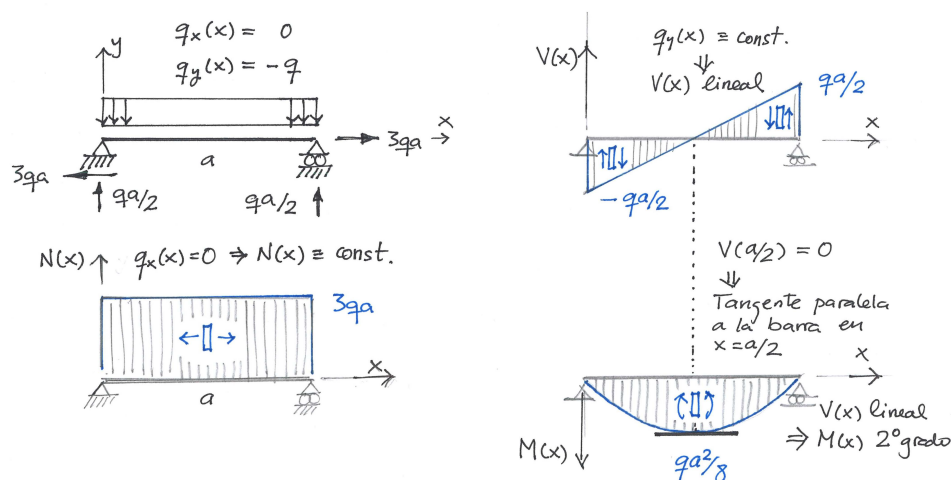


3. Se considerarán distintos tramos en cada barra, diferenciándolos en función de si tienen o no carga repartida y de la forma de ésta. En cada tramo, la **forma del diagrama** (constante, lineal, parabólica...) queda **determinada por la ecuación de equilibrio correspondiente** en función del grado de la función que representa la carga que actúe.

En el ejemplo anterior no hay fuerzas de eje x distribuidas a lo largo de la directriz ($q_x(x) = 0$), por lo tanto $dN/dx = 0$ en todo el tramo, luego *el axil es una función constante* de valor $N = 3qa$, que se deduce del valor que toma en cualquiera de los dos extremos.

Las cargas distribuidas de eje y son constantes, de valor $q_y(x) = -q$, entonces la derivada del cortante es constante en el tramo ($dV/dx = -q$), luego *el cortante es una función lineal* de x y varía entre los valores obtenidos en los extremos de la viga $V_A = -qa/2$ y $V_B = qa/2$. En general, en cada sección **la pendiente del diagrama de esfuerzos cortantes es igual al valor de la carga repartida cambiado de signo**.

Por lo que respecta al momento flector, como $m_z(x) = 0$ (no hay pares exteriores distribuidos) y el cortante es una función lineal de x , entonces *el momento será una función cuadrática en x* (parábola de segundo grado) para que su derivada sea igual al cortante cambiado de signo. En cada sección **la pendiente del diagrama de momentos flectores es igual al valor del esfuerzo cortante cambiado de signo** (suponiendo que no actúan pares exteriores distribuidos de eje z). Por ello, como en el centro de la viga $V = 0$, la tangente al diagrama de momentos será paralela a la directriz (pues $dM/dx = 0$), es decir, el diagrama de momentos tendrá un máximo o mínimo. Para representar el diagrama sabemos que los valores del momento son nulos en los extremos y podemos calcular el valor del momento en el centro ($M = qa^2/8$) como se indica en el punto siguiente.



4. Frecuentemente es necesario calcular el valor de un esfuerzo en una sección intermedia, no existiendo para ello un único procedimiento (conviene consultar la sección 2.2 y los ejemplos incluidos al final de la sección 2.3):
 - a) Los esfuerzos que actúan sobre la cara frontal de una sección se pueden obtener como las fuerzas y momentos necesarios para el equilibrio de la parte de la estructura que queda a la izquierda de la sección (según la definición A de esfuerzo).
 - b) También pueden obtenerse como fuerzas y momentos estáticamente equivalentes a todas las fuerzas que actúan a la derecha de la sección (según la definición B de esfuerzo).

3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

- c) Los esfuerzos sobre la cara frontal de una sección son iguales y opuestos a los que actúan sobre la cara dorsal (principio de acción y reacción). Por ello calcular los esfuerzos sobre la cara frontal de una sección a partir de la definición A proporciona necesariamente los mismos resultados (con sentidos opuestos) que hacerlo sobre la cara dorsal empleando la misma definición, es decir, estableciendo el equilibrio de la otra parte de la estructura.

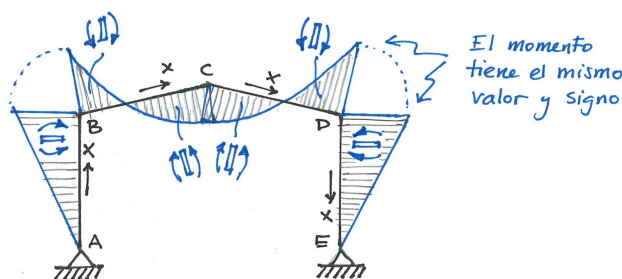
Se escogerá un procedimiento u otro en función de lo que se considere menos laborioso; para ello es necesario algo de práctica. También se puede utilizar la igualdad de resultados para verificar los resultados.

5. Cuando sobre una sección hay aplicada una fuerza o un par, el diagrama de esfuerzos correspondiente presenta un salto cuyo valor es precisamente el de la fuerza o par.

Criterios para la representación de diagramas en estructuras con barras inclinadas

En el caso de estructuras en las que haya barras inclinadas o verticales conviene escoger de antemano un sentido de avance sobre cada barra; éste será el sentido del eje x local de la barra. Una vez llevada a cabo esta elección, la representación de los esfuerzos se realiza con los mismos criterios indicados en el apartado anterior.

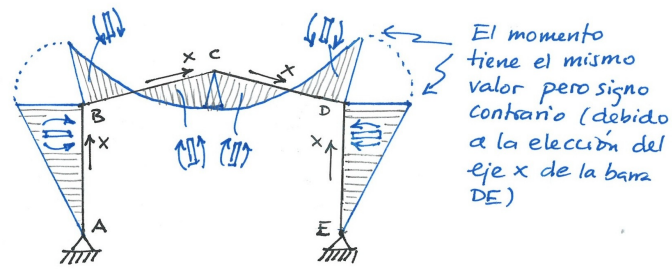
En el pórtico de la figura se ha representado los diagramas de momentos flectores debidos a una carga repartida actuando sobre las barras que forman el dintel. Observemos la barra vertical de la derecha, para la que se ha escogido el eje x local apuntando hacia abajo: teniendo en cuenta que los momentos flectores en ella tienen el sentido indicado por el símbolo del diagrama, su signo en relación con el eje local de la barra será negativo. Por tanto se representarán, siguiendo el criterio introducido en el apartado anterior, por encima del eje x de la barra, es decir, por fuera del pórtico. Con este criterio, el momento flector a ambos lados del nudo D tiene el mismo valor y el mismo signo.



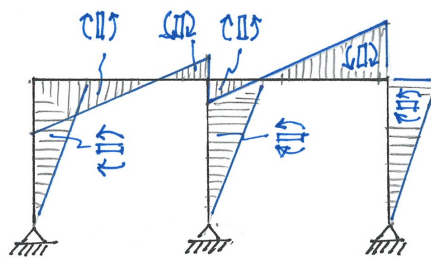
Sin embargo, si se escoge el sentido opuesto para el eje local de la barra DE (hacia arriba), entonces el signo de los momentos flectores en la barra es positivo. El diagrama se representa por debajo del eje x local, es decir, sigue dibujándose por fuera de la estructura. Sin embargo, en este caso se produce un cambio de signo en el momento a cada lado del nudo D.

Por este motivo, en pórticos de un vano, se suele escoger los ejes locales de manera que se mantenga un mismo sentido de recorrido de las barras, lo que garantiza que no se producen cambios de signo del momento en los nudos. En pórticos de dos o más vanos se suele adoptar el mismo criterio para las barras exteriores (recorrerlas empezando por el nudo de la izquierda y acabando por el de la derecha). El sentido correspondiente a las barras verticales intermedias

3.2. Diagramas de esfuerzos en problemas planos

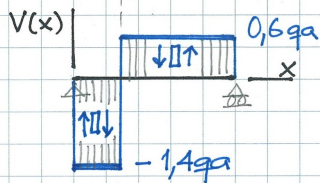
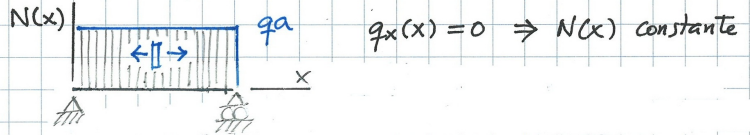
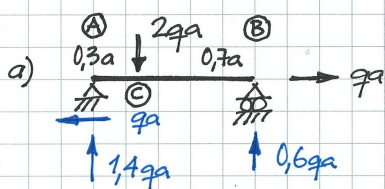


puede escogerse arbitrariamente. En la figura se ha representado el diagrama de momentos correspondiente a un pórtico de dos vanos sometido a cargas horizontales aplicadas hacia la derecha en los nudos exteriores.



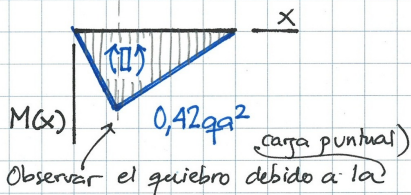
3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

M 3.1 Obtener y representar los diagramas de esfuerzos en las estructuras del ejercicio M 2.1

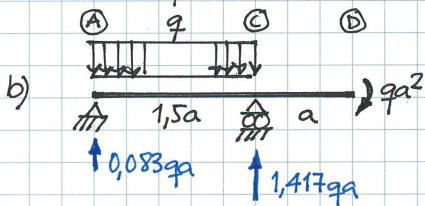


En los tramos AC y CB la carga repartida es nula, por tanto el cortante es constante. Su valor es el correspondiente a los apoyos.

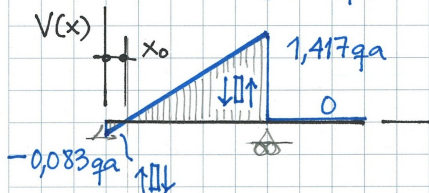
El salto en el diagrama tiene el valor de la carga aplicada



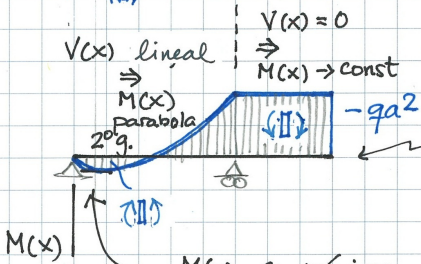
En los tramos AC y CB el cortante es constante, por tanto el flector es lineal. La pendiente del diagrama de flectores es igual al cortante (cambiado de signo)



El axial es nulo en toda la estructura

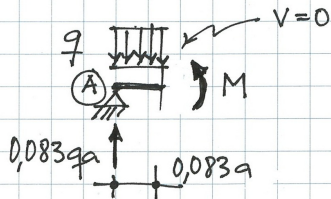


$$\frac{x_0}{0,083qa} = \frac{1,5a}{(0,083 + 1,417)qa} \Rightarrow x_0 = 0,083a$$



El valor del flector en el extremo libre no es nulo, debido a la acción del par exterior aplicado

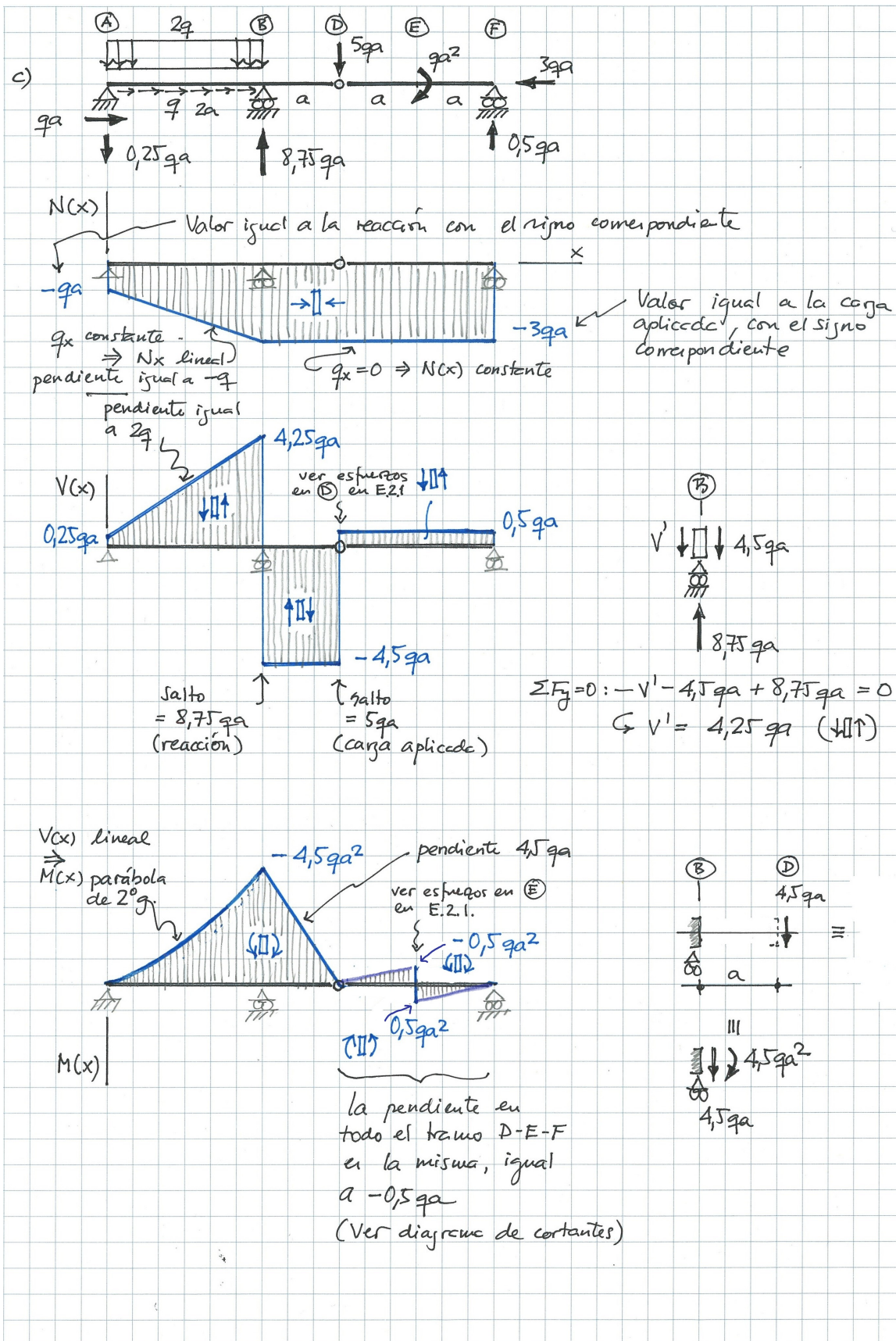
$M(x)$ es máximo en $x = x_0 = 0,083a$. Su valor puede obtenerse así:



$$\sum M_A = 0 : M - 0,083qa \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,083a = 0$$

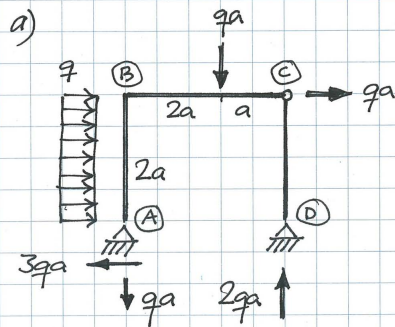
$$\hookrightarrow M = 0,0034 qa^2$$

3.2. Diagramas de esfuerzos en problemas planos

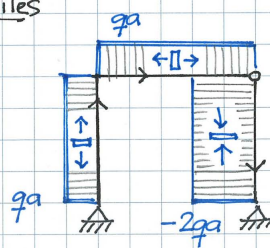


3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

M.3.2 Obtener y representar los diagramas de esfuerzos en las estructuras del ejercicio M.2.2.



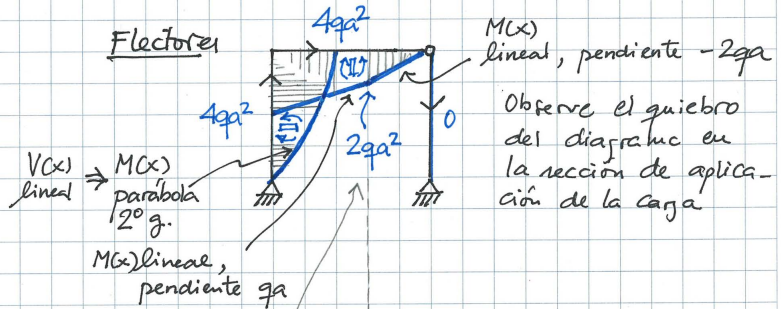
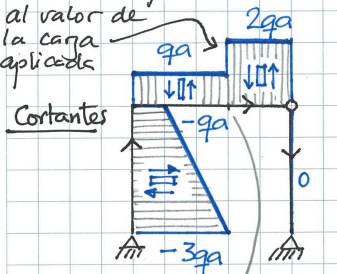
Axiles



El axil es constante en todas las barras ya que $q_x(x) = 0$ en ellas.

Los valores de los esfuerzos en B y C se obtienen del ejercicio M.2.2

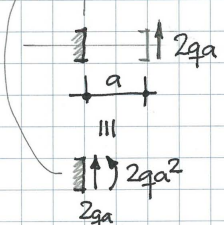
El salto es igual al valor de la carga aplicada



Observe el quiebro del diagrama en la sección de aplicación de la carga

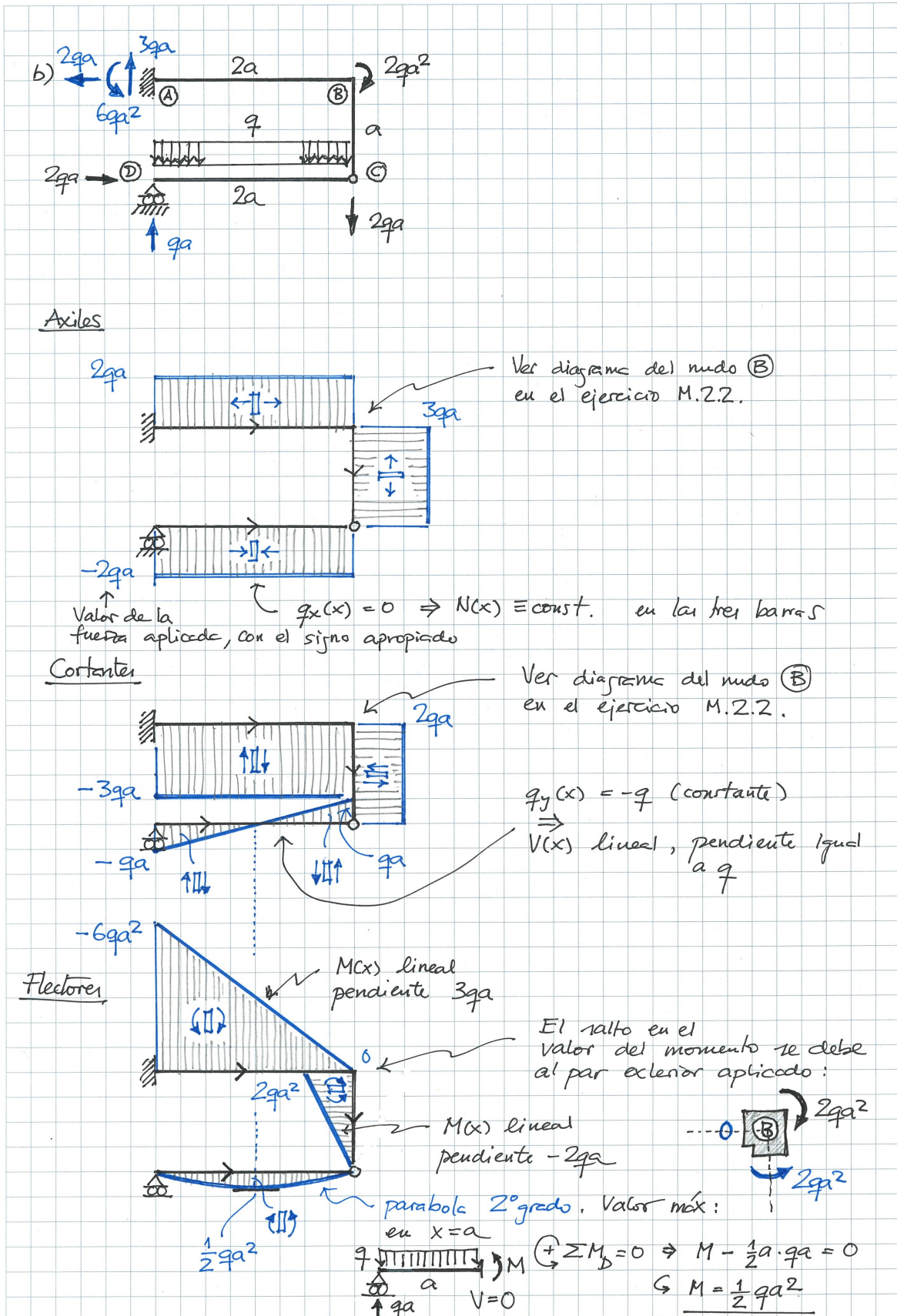


Cortantes en la sección con carga puntual



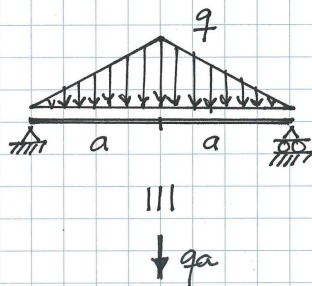
Observe el sentido escogido para las barras, el signo del esfuerzo coherente con él y el lado por el que se ha representado, según el criterio explicado en la teoría

Para entender los valores de los esfuerzos en las barras se debe atender al valor de las reacciones, así como a los diagramas de sólido libre de los nudos B y C incluidos en el ejercicio M.2.2



3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

M 3.3 Obtener y representar los diagramas de esfuerzos en la estructura de la figura.

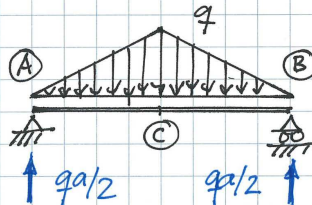


A efectos de calcular reacciones (y sólo a estos efectos) podemos sustituir la carga exterior por una fuerza equivalente de valor

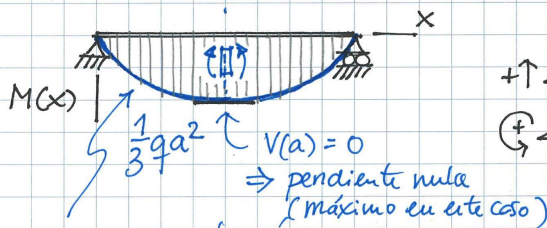
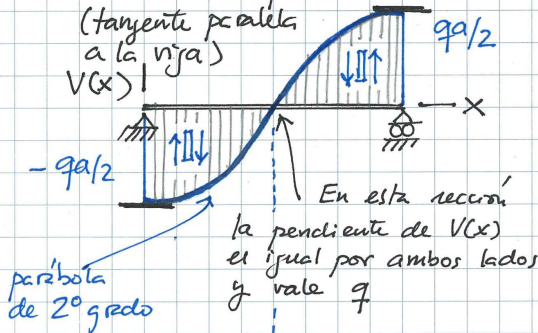
$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot q = qa$$

aplicada en el centro de la viga (ya que la carga es simétrica)

Las reacciones se obtienen de fórmulas inmediatas:

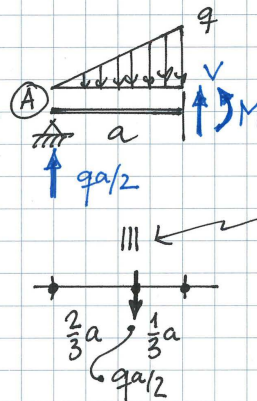


En A y B $q_y = 0$
 $\Rightarrow V(x)$ tiene pendiente 0
 (tangente paralela a la viga)



$V(x)$ es una función polinómica de 2º grado
 $\Rightarrow M(x)$ es una función polinómica de 3er grado

Como la carga $q_y(x)$ es lineal en cada tramo de la viga, el cortante será una función de 2º grado en cada tramo. Conviene calcular el valor de los esfuerzos en la sección central:



La carga ext. equivale a una fuerza de valor $qa/2$ aplicada a $2/3 a$

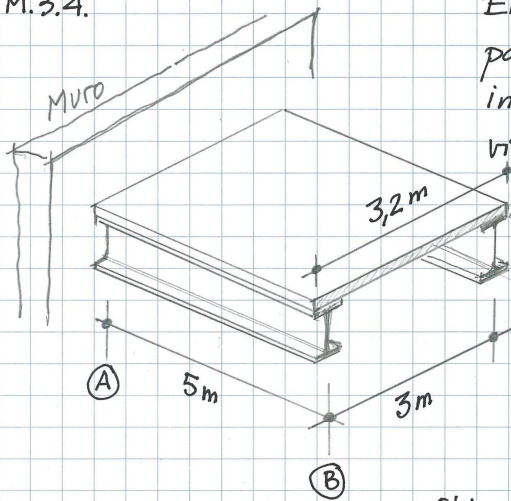
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow V = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 : M - \frac{qa}{2} \cdot \frac{2}{3} a = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{3} qa^2 \quad (\uparrow \text{II})$$

Con estos datos se puede dibujar bien los diagramas

M.3.4.



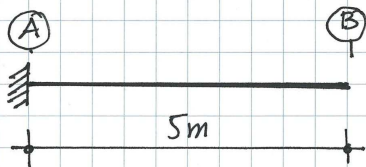
El voladizo de la figura se emplea para acumular cargas en un edificio industrial. Esta formado por dos vigas de acero tipo IPE 450 sobre las que se apoya una losa de hormigón de 12 cm de espesor.

Sobre el voladizo puede llegar a acumularse una masa de 1000 Kg/m^2 .

Obtener las reacciones y diagramas de esfuerzos en la viga AB.

- Dato:
- Peso específico del acero: $78,5 \text{ kN/m}^3$
 - Peso específico del hormigón armado: 25 kN/m^3
 - Área de la sección transversal del IPE450: $98,8 \text{ cm}^2$

Para obtener las reacciones y los diagramas de esfuerzos en la viga definimos el modelo estructural correspondiente:



Debemos ahora determinar las cargas que actúan sobre el modelo que serán: 1. El peso propio del IPE 450, 2. La carga distribuida correspondiente a la parte de losa de hormigón que soporta la viga, 3. La carga distribuida correspondiente a la parte de sobrecarga que soporta la viga.

A continuación calculamos la contribución de cada una de ellas

3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

1. Peso propio del IPE 450

Llamando γ_s al peso específico del acero y A al área de la sección transversal de la viga, el peso por metro lineal de viga será

$$q_v = \gamma_s \cdot A = 78,5 \frac{\text{KN}}{\text{m}^3} \cdot 98,8 \text{ cm}^2 \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{100^2 \text{ cm}^2} = 0,776 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

que actuará como carga repartida a lo largo de la viga

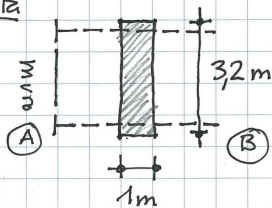
2. Carga distribuida correspondiente a la losa

El peso por unidad de superficie de losa es

$$w_l = 25 \text{ KN/m}^3 \cdot 12 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 3 \text{ KN/m}^2$$

El peso de una banda de 1m de losa se reparte por igual en cada viga, de manera que una viga recibe la mitad del mismo:

Planta



$$q_l = \left(3 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot 3,2 \text{ m} \right) / 2 = 4,8 \text{ KN/m}$$

Esta es la carga repartida que actúa sobre la viga debido al peso de la losa

3. Carga repartida debido a la sobrecarga

El peso por unidad de superficie debido a la sobrecarga es:

$$w_s = 1000 \text{ kg/m}^2 \cdot 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot \frac{1 \text{ KN}}{1000 \text{ N}} = 9,81 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

Empleando el razonamiento anterior, la carga repartida que actúa sobre cada viga es:

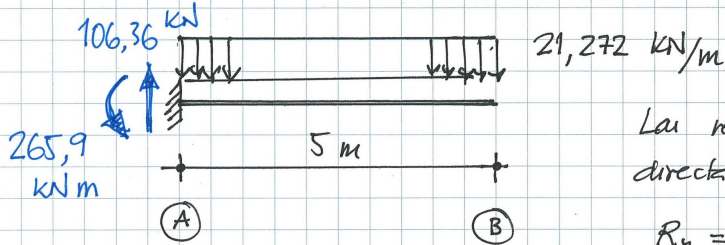
$$q_s = \left(9,81 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \cdot 3,2 \text{ m} \right) / 2 = 15,696 \text{ KN/m}$$

Por tanto, la carga distribuida total será:

$$q = q_v + q_l + q_s = 0,776 + 4,8 + 15,696 = 21,272 \frac{\text{KN}}{\text{m}}$$

3.2. Diagramas de esfuerzos en problemas planos

Entonces, el modelo completo con carga es:



Las reacciones se calculan directamente:

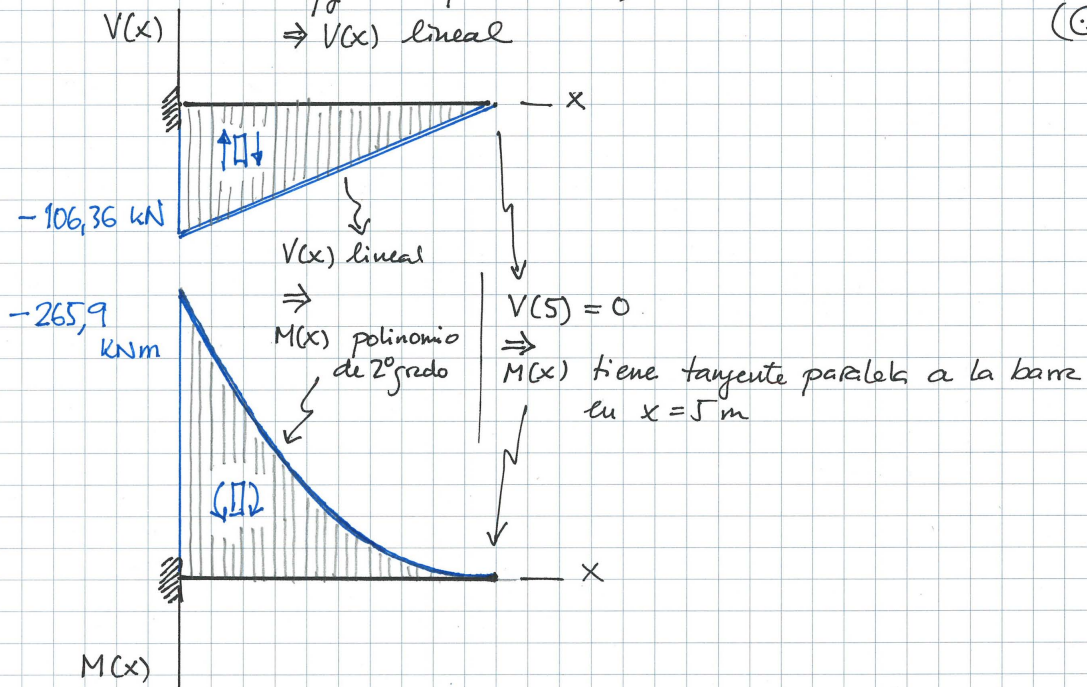
$$R_y = 21,272 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 5 \text{ m} = 106,36 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

Los esfuerzos axiales son nulos

$$q_y(x) = -q \text{ (constante)}$$

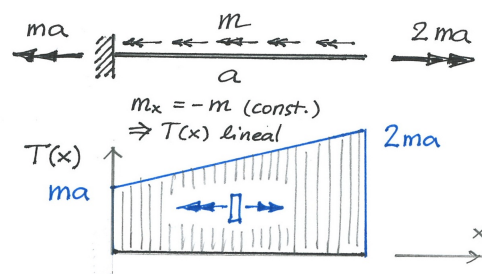
$\Rightarrow V(x)$ lineal

$$M = 106,36 \text{ kN} \cdot \frac{5}{2} \text{ m} = 265,9 \text{ kNm} \quad (\ominus)$$



3.3. Diagramas de momentos torsores

En barras sometidas a la acción de pares torsores aplicados puntualmente o pares torsores distribuidos por unidad de longitud representamos simplemente los momentos torsores positivos por encima de la barra. El criterio de signos es el que se indicó en la sección 3.1.2. Observando la ecuación de equilibrio del problema de torsión (3.2), si en un tramo de la barra el par torsor distribuido es nulo, el momento torsor será constante; si el par torsor distribuido es constante, el momento torsor será lineal, y así sucesivamente. En general, en cada sección **la pendiente del diagrama de momentos torsores es igual al valor del par torsor distribuido cambiado de signo**. En el ejemplo considerado la distribución de momentos torsores es lineal, y los valores en los extremos de la barra se deducen del par reacción en el extremo fijo y el par aplicado en el extremo libre



3.4. Diagramas de esfuerzos en modelos espaciales

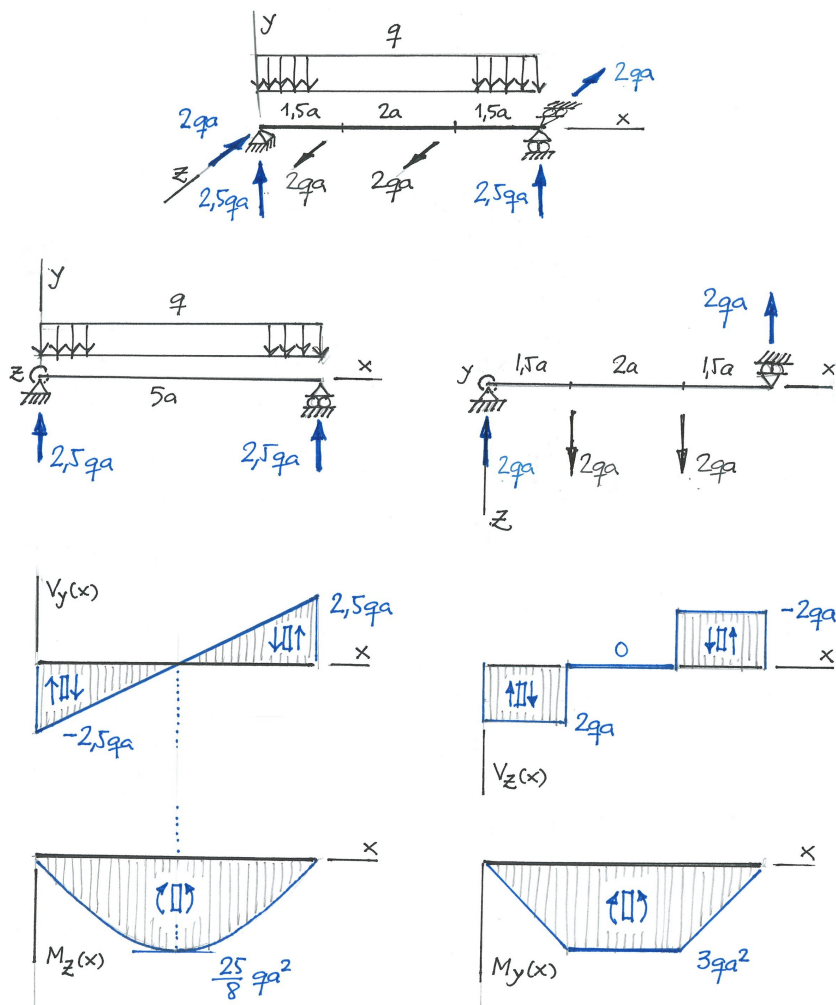
Comenzamos analizando el caso de una viga simplemente apoyada sometida a cargas contenidas en el plano vertical y también en el horizontal. Se observa que la viga está sometida a esfuerzos cortantes y momentos flectores de ejes y , z . Para representar los esfuerzos se representan las acciones que actúan en el plano x, y y las que actúan en el plano x, z por separado.

La representación de las acciones en x, y , así como la de los esfuerzos correspondientes V_y y M_z es la usual, correspondiente al caso plano, explicada en apartados anteriores.

La representación de las acciones en x, z se hace de modo que el eje z apunta hacia abajo; de este modo el eje y , que será el eje de los momentos flectores debidos a estas acciones, apunta hacia fuera. En este caso, tanto los esfuerzos cortantes como los momentos flectores se representan con el eje de ordenadas orientado hacia abajo. De este modo se consigue una representación análoga a la correspondiente a las acciones en el plano x, y .

En el ejemplo se observan los criterios indicados: conviene prestar atención a los signos de los esfuerzos y a la forma de representarlos.

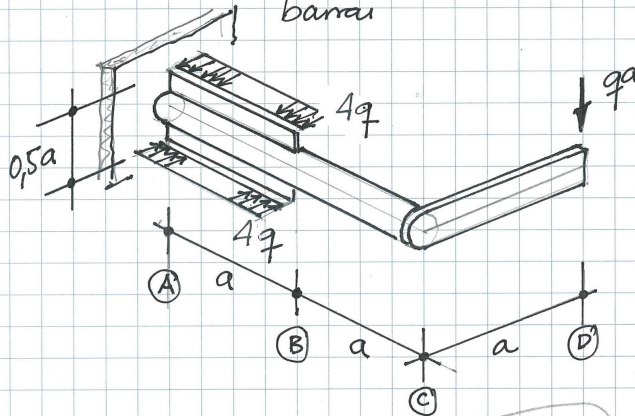
3.4. Diagramas de esfuerzos en modelos espaciales



Cuando se analiza un modelo espacial con más barras hay que escoger un sentido para los ejes locales de cada barra (en este caso no basta con escoger el sentido de avance, también es necesario decidir la orientación del eje y -o el z -). En cada una de las barras se aplicarán los criterios de representación explicados, sin olvidar que también pueden aparecer esfuerzos axiales y momentos torsores.

3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

M.3.5. La barra ABC está empotrada en A y rígidamente unida a la barra CD. Representar los diagramas de esfuerzos en ambas barras.



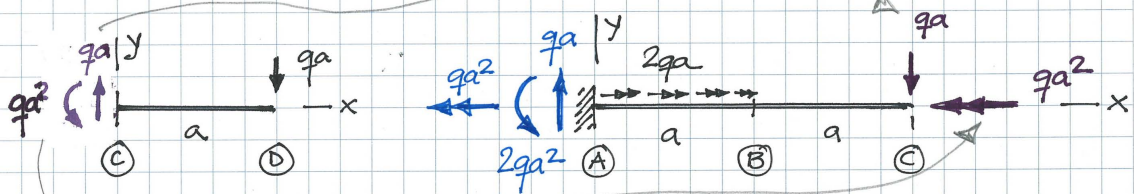
En el tramo AB:
 $m_x(x) = 4q \cdot 0,5a = 2qa \quad (\rightarrow)$

Únicamente representamos los esfuerzos no nulos

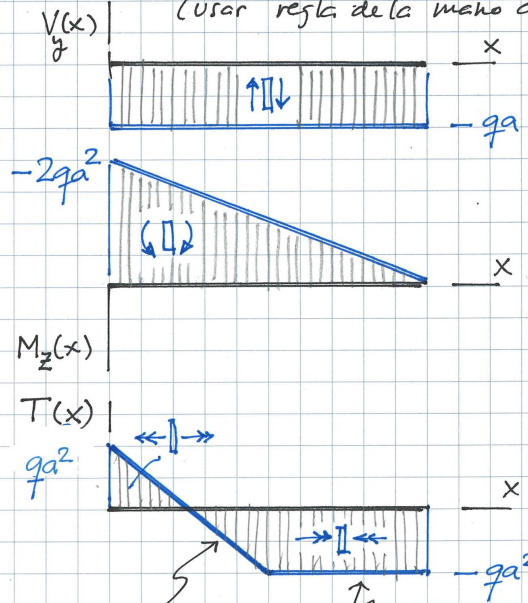
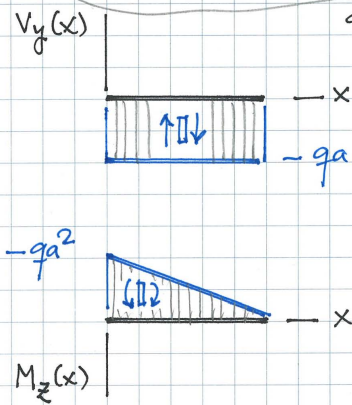
El torque reacción se obtiene:

$$\sum M_x = 0: M_E + 2qa \cdot a - qa^2 = 0$$

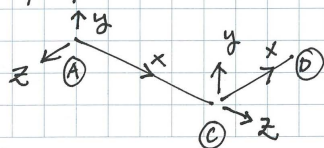
$$\hookrightarrow M_E = -qa^2 \quad (\leftarrow)$$



el flexor en C se convierte en torque al cambiar de orientación la barra. Atención al sentido (usar regla de la mano derecha)



Observe que en cada barra se ha escogido un sistema de referencia apropiado:

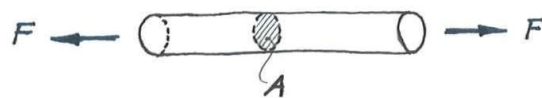


$m_x(x) \text{ const} \Rightarrow T(x) \text{ lineal}$
 $m_x(x) = 0 \Rightarrow T(x) \text{ const.}$

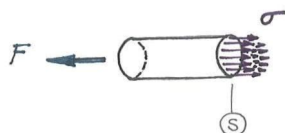
Conceptos elementales de Elasticidad

4.1. Tensión normal y alargamiento unitario

Consideremos una barra recta de sección transversal constante de valor A , sometida a tracción por medio de fuerzas de magnitud F aplicadas en sus extremos en la dirección de la barra y en sentidos opuestos.



Supongamos ahora que aislamos una parte de la barra mediante un corte ideal por una sección cualquiera S . Dado que por el Principio Fundamental de la Mecánica de Sólidos Deformables esa parte de la estructura debe estar en equilibrio, sobre la sección S actuarán *fuerzas internas* cuya resultante deberá ser de magnitud F .



El corte ideal de la barra deja al descubierto la superficie de la sección S , que está en el interior del sólido. Evidentemente no existe un punto concreto de la sección S sobre el que actúe la fuerza puntual F . En lugar de ello la fuerza se reparte por toda la sección de modo que cada punto de la misma está sometido a una *fuerza interna por unidad de superficie*, perpendicular a la sección, de magnitud σ y dimensiones $[F L^{-2}]$. Su resultante será pues

$$\iint_S \sigma dA = F \quad (4.1)$$

Supondremos que, cuando las secciones estén suficientemente alejadas de las zonas de aplicación de las fuerzas extremas, el valor de σ es constante en todos los puntos de la sección transversal. Entonces se cumplirá¹

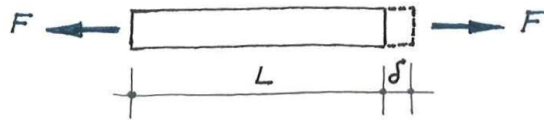
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (4.2)$$

¹Esta fórmula sólo es aplicable al caso de la barra sometida a tracción pura.

4. CONCEPTOS ELEMENTALES DE ELASTICIDAD

Las fuerzas internas por unidad de superficie que actúan sobre la sección transversal reciben el nombre de **tensiones normales**.

Por otra parte, la tracción F produce un alargamiento δ de la barra, como consecuencia de la *deformabilidad* del sólido.



La observación muestra que barras de la misma sección y distinta longitud sometidas a la misma fuerza sufren alargamientos totales distintos, y que es más trabajoso producir el mismo alargamiento en una barra corta que en una larga. Por ello, necesitamos una medida de la deformación relativa a la dimensión inicial del sólido. La medida usada habitualmente en ingeniería es el **alargamiento unitario** o incremento de longitud relativo a la longitud inicial. Si suponemos que la longitud inicial de la barra es L ,

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \quad (4.3)$$

es el alargamiento unitario. Esta medida de la deformación es adimensional.

Criterio de signos

Se considera que:

- La tensión normal es positiva cuando es una tracción, y negativa cuando es una compresión.
- El alargamiento unitario es positivo cuando la longitud se incrementa, y negativo cuando se reduce (acortamiento).

Con este criterio de signos existe una correspondencia entre el signo de la tensión normal y el del alargamiento unitario, ya que sabemos que una tracción ($\sigma > 0$) va a producir incremento de longitud ($\epsilon > 0$).

Representación de las tensiones

Habitualmente, el *estado tensional en el entorno de un punto* se representa indicando las tensiones que actúan sobre las caras de un *volumen elemental de sólido*, también llamado *elemento diferencial de sólido*, que es un cubo de dimensiones infinitesimales, de aristas dx , dy , dz . En



el caso descrito, sobre el elemento diferencial sólo actúa la tensión σ sobre las caras perpendiculares al eje de la barra, suponiendo que uno de los ejes del elemento se orienta paralelamente al eje de la barra. El estado tensional representado se denomina de **tracción pura**.

4.2. Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson. Ley de Hooke

El ensayo de tracción uniaxial 4.1 permite obtener la relación entre la fuerza aplicada y el alargamiento medido en una muestra de material (probeta). La probeta suele ser una barra o pletina, que se sujeta mediante mordazas a un dispositivo hidráulico que introduce la fuerza de modo controlado. Ensayando por este procedimiento una barra de acero (por ejemplo) se observa que existe proporcionalidad entre la fuerza aplicada y el alargamiento medido siempre que no se supere un cierto valor de la fuerza (el correspondiente al punto 1 de la gráfica). Como la fuerza es proporcional a la tensión normal ($F = \sigma A$) y el alargamiento total es

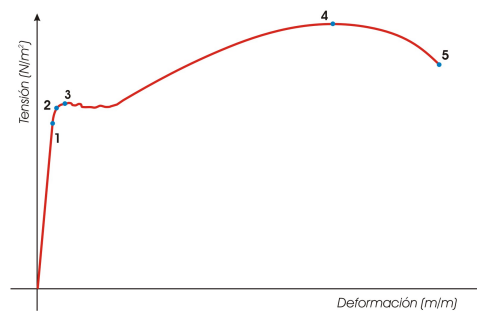
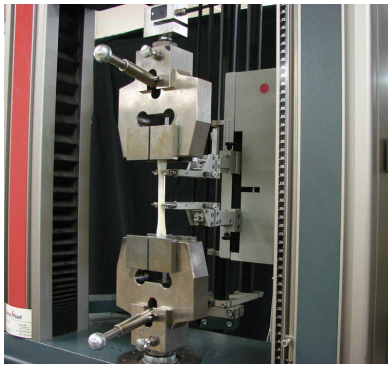


Figura 4.1: Ensayo de tracción

proporcional al alargamiento unitario ($\delta = \epsilon L$), se deduce que **la tensión normal debe ser proporcional al alargamiento unitario**. Experimentando con barras de distinta sección y longitud, pero de un mismo material, se observa que esta última proporción siempre es la misma. La relación entre la tensión normal y el alargamiento unitario está gobernada por un parámetro E característico del material, que se denomina **módulo de elasticidad** o **módulo de Young** y tiene dimensiones $[F L^{-2}]$:

$$\sigma = E \epsilon \quad (4.4)$$

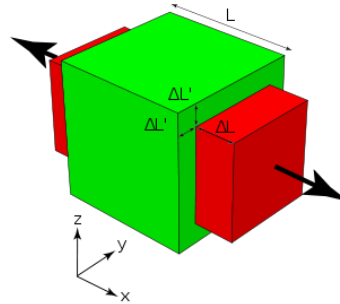
El módulo de elasticidad es la pendiente del tramo de la gráfica del ensayo en el que la respuesta es proporcional (en la figura, el tramo comprendido entre el origen y el punto 1). Ensayando probetas de distintos materiales se obtienen gráficas con distintas inclinaciones. Los materiales más deformables corresponden a las gráficas más tendidas, y los más rígidos presentan gráficas con inclinaciones más cercanas a la vertical. *El módulo de elasticidad es, por tanto una medida de la rigidez del material.*

La proporcionalidad entre tensión y deformación fue observada por Robert Hooke (1635–1703) en 1678, por ello la expresión anterior se denomina **Ley de Hooke**².

²La Ley de Hooke formulada de este modo sólo es válida para el caso de tracción o compresión uniaxial

4. CONCEPTOS ELEMENTALES DE ELASTICIDAD

Por otra parte, en el mismo ensayo de tracción simple se puede comprobar que, además del alargamiento de la barra, se produce otro fenómeno consistente en la reducción de las dimensiones de la sección transversal, que se denomina *efecto Poisson*, pues Siméon D. Poisson (1781–1840) predijo su existencia mediante un razonamiento matemático.

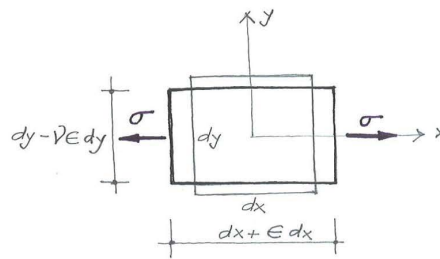


La relación entre el alargamiento unitario en la dirección del eje de la barra ϵ y el alargamiento unitario en cualquier dirección ortogonal (contenida por tanto en el plano de la sección transversal) ϵ_t se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\epsilon_t = -\nu \epsilon \quad (4.5)$$

donde ν es el **coeficiente de Poisson**, que es un parámetro adimensional que sólo depende del material. El rango de variación del coeficiente de Poisson es

$$0 < \nu \leq 0,5$$



Denominamos **material de Hooke** al material ideal elástico, lineal, isótropo y homogéneo. Un material es **elástico** cuando tiene la propiedad de recuperar la deformación una vez cesa la acción que la produce. La **linealidad** hace referencia a la proporcionalidad entre tensión y deformación, y la **isotropía** se refiere a la independencia de las propiedades mecánicas de la dirección en la que se observa. El módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson son los parámetros que definen las características mecánicas del material de Hooke. El cuadro 4.1 recoge los rangos de valores de los dos parámetros en distintos materiales usados en construcción³.

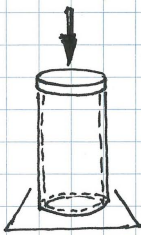
³El hormigón no tiene un comportamiento elástico lineal, no obstante, de forma aproximada y bajo ciertas condiciones la normativa correspondiente permite usar parámetros que están en el rango mostrado en el cuadro.

4.2. Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson. Ley de Hooke

	Hormigón	Acero	Vidrio	Madera	Elastómero
E (GPa)	22 - 45	195 - 210	50 - 90	7 - 20	0,01 - 0,10
ν	0,20	0,27 - 0,30	0,18 - 0,30		0,50

Cuadro 4.1: Parámetros elásticos de diversos materiales

M 4.1.



Un tubo de acero CHS 244,5 x 16 de 75 cm de longitud se ensaya en laboratorio a compresión simple. En el ensayo se alcanza una fuerza de compresión máxima de 1000 kN.

El tubo tiene un diámetro exterior de 244,5 mm y un espesor de 16 mm. El módulo de elasticidad del acero del tubo es de 206 GPa y el coeficiente de Poisson es $\nu = 0,3$.

a) Determinar el alargamiento del tubo cuando se alcanza la carga máxima en el ensayo

El alargamiento del tubo será $\delta = \epsilon L$ (2.3) El alargamiento unitario en la pieza es $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$ (2.4) y la tensión es

$\sigma = F/A$ (2.2). Entonces

$$A = \frac{\pi}{4} (244,5^2 - 212,5^2) = 11485,66 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{-1 \cdot 10^6 \text{ N}}{11485,66 \text{ mm}^2} = -87,065 \text{ MPa} \quad (\text{compresión})$$

$$\epsilon = \frac{-87,065 \text{ MPa}}{206000 \text{ MPa}} = -4,23 \cdot 10^{-4} = -0,42 \text{ mm/m}, \text{ y}$$

$$\delta = -4,23 \cdot 10^{-4} \cdot 0,75 \text{ m} = -0,32 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{-0,32 \text{ mm}} \quad (\text{acortam.})$$

b) Calcular el incremento de diámetro y de espesor para la carga máx. La deformación transversal es (2.5) $\epsilon_t = -\nu \epsilon = -0,3(-4,23 \cdot 10^{-4})$

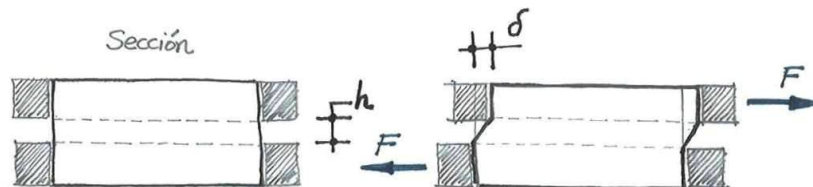
$$\hookrightarrow \epsilon_t = 1,3 \cdot 10^{-4}$$

El incremento de diámetro es $\Delta d = \epsilon_t \cdot d = 1,3 \cdot 10^{-4} \cdot 244,5 \text{ mm} = \underline{0,032 \text{ mm}}$

El incremento de espesor es $\Delta t = \epsilon_t \cdot t = 1,3 \cdot 10^{-4} \cdot 16 \text{ mm} = \underline{0,002 \text{ mm}}$

4.3. Tensión tangencial y distorsión angular

Consideremos ahora un ensayo de corte directo. El ensayo se lleva a cabo sobre una probeta de sección transversal A y altura h , aplicando una fuerza F contenida en el plano de una de las caras y midiendo el desplazamiento lateral δ de la probeta.



Como sucedía en el ensayo de tracción simple, se observa que existe proporcionalidad entre la fuerza aplicada y el desplazamiento medido, siempre que no se supere un determinado valor de la primera. Análogamente a lo que sucede en el ensayo de tracción directa, si se realizan ensayos sobre probetas de distinta altura y sección, pero de un mismo material, se observa que el comportamiento es independiente de las dimensiones de la probeta cuando se emplean las medidas adecuadas de las fuerzas y los desplazamientos.

Para ello, definimos la **tensión tangencial** como la fuerza aplicada en el plano de la sección por unidad de superficie

$$\tau = F/A \quad (4.6)$$

y la **distorsión angular** como el ángulo (aproximado por la tangente) de distorsión de la probeta

$$\gamma = \delta/h \quad (4.7)$$

Los ensayos muestran entonces, que para un mismo material se cumple

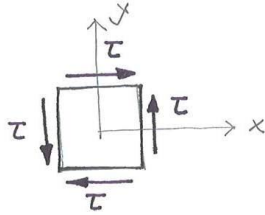
$$\tau = G \gamma \quad (4.8)$$

El parámetro G se denomina **módulo de deformación transversal** y tiene dimensiones $[FL^{-2}]$. No es un parámetro adicional, ya que conocidos E y ν puede calcularse a partir de ellos mediante la siguiente expresión⁴:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.9)$$

Representando las tensiones tangenciales que actúan sobre las caras superior e inferior del elemento diferencial de sólido observamos que el equilibrio de momentos en el elemento exige que sobre las caras laterales actúen las mismas tensiones tangenciales con los sentidos indicados.

⁴La obtención de esta fórmula no es objeto de este curso



Este estado tensional en el que únicamente actúan tensiones tangenciales se denomina **corte puro**. Teniendo en cuenta el equilibrio de momentos del elemento, únicamente son posibles las siguientes dos configuraciones de tensiones sobre la sección: El **criterio de signos** de la

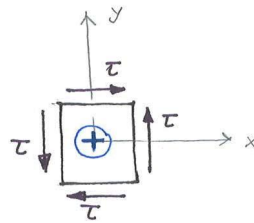
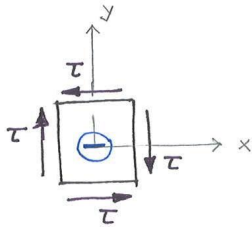
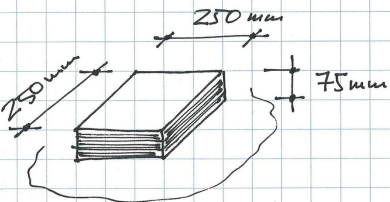


figura es habitual en la mecánica de estructuras: las tensiones tangenciales son positivas cuando actúan hacia arriba en la cara que mira en el sentido de avance del eje x ; esta cara se denomina *cara x positiva*.


M 4.2



Un bloque de neopreno se emplea como apoyo de una estructura. Si su desplazamiento lateral máximo admisible es de 25 mm, calcular la máxima fuerza lateral que puede actuar sobre el apoyo. El módulo de elasticidad del neopreno es de 2,7 MPa y su coeficiente de Poisson es de 0,5.

La fuerza se obtendrá a partir de (2.6) $F = \tau A$ con la tensión tangencial τ correspondiente al máximo desplazamiento lateral admisible δ . $\tau = G \gamma$ (2.8) y $\gamma = \delta/h$ (2.7)

Entonces:

$$\gamma = \frac{25 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} = 0,3333$$


$$\tau = G \gamma = 0,9 \text{ MPa} \cdot 0,3333 = 0,3 \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2,7 \text{ MPa}}{2(1+0,5)} = 0,9 \text{ MPa}$$

$$F = 0,3 \text{ N/mm}^2 \cdot 250^2 \text{ mm}^2 = 18750 \text{ N} = \underline{18,75 \text{ kN}}$$

4.4. Estado tensional plano

4.4.1. Concepto y notación

Permaneciendo en el marco del caso plano, consideramos ahora una situación más general obtenida al superponer al estado de corte puro dos estados de tracción (o compresión) pura en las direcciones x e y respectivamente.

En la representación de la figura se ha empleado la notación clásica para las componentes de la tensión: σ_x , σ_y , τ_{xy} . El subíndice de la tensión normal denota el eje coordenado perpendicular a la cara sobre la que actúa. El subíndice de la tensión tangencial denota que actúa sobre la cara perpendicular al eje x en la dirección y , o viceversa: dado que, por equilibrio de momentos, el valor de la tensión tangencial es el mismo en caras perpendiculares, no es necesario cambiar el orden de los subíndices para referirse a la tensión que actúa sobre el plano perpendicular al eje y en la dirección x . Cuando se hace uso de fórmulas como (4.10) en las que intervienen σ_x ,

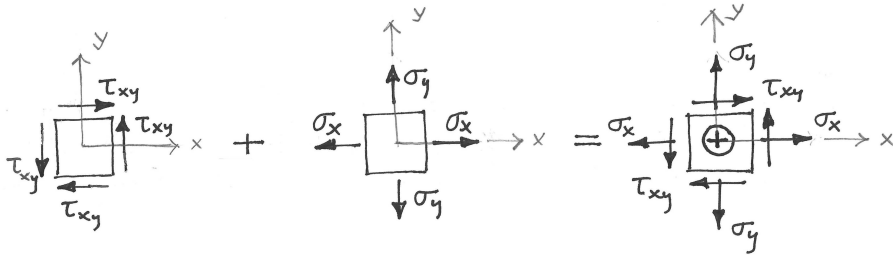
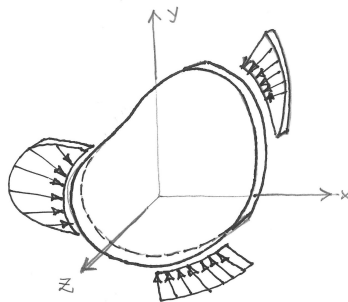


Figura 4.2: Estado tensional plano

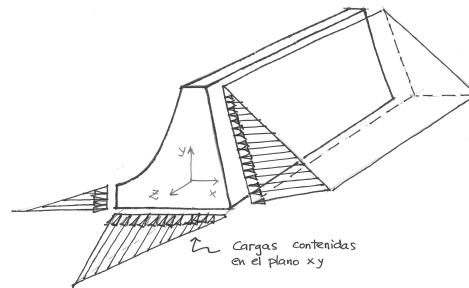
σ_y , τ_{xy} , los sentidos positivos a considerar son los que aparecen en la figura 4.2

Cuando no actúan tensiones sobre las caras perpendiculares al eje z se dice que el punto del sólido se encuentra en un estado de **tensión plana**. También es posible considerar un estado tensional en el que sobre las caras perpendiculares al eje z actúa (únicamente) una tensión normal $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$. En ese caso se dice que el punto del sólido se encuentra en un estado de **deformación plana**. Ambas situaciones se consideran **estados tensionales planos**.

Los estados de tensión plana ($\sigma_z = 0$) reproducen la situación en la que se encuentra un sólido delgado aplanado (también denominado laja) sometido a fuerzas en su contorno.

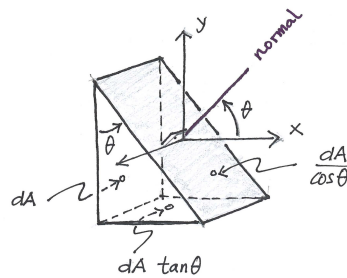


Los estados de deformación plana describen la respuesta de sólidos muy largos de sección constante, con movimiento coaccionado en la dirección z , sometidos a cargas en su contorno uniformes a lo largo de las generatrices.

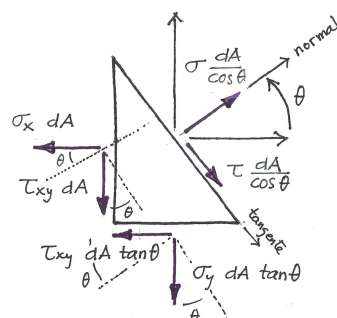


4.4.2. Componentes intrínsecas de la tensión

El elemento de volumen analizado hasta ahora tiene caras perpendiculares a los ejes coordenados x e y . Nos preguntamos ahora cuál es el valor de la tensión normal σ y la tensión tangencial τ sobre un plano cuya normal forma un ángulo θ con el eje x . Para analizar esta situación aislamos un elemento diferencial de volumen una de cuyas caras tiene la inclinación correspondiente:



Es importante indicar que hemos optado por escoger *a priori* el sentido de la tensión tangencial representado en la figura. Este sentido determinará el criterio de signo positivo de la tensión tangencial en el desarrollo que sigue. La dimensión de las caras del elemento se ha representado en la figura anterior. Con ello, las fuerzas que actúan sobre cada cara son las siguientes:



Estableciendo el equilibrio en la dirección normal y tangente,

$$\sum F_n = 0 \rightarrow \frac{dA}{\cos \theta} \sigma - \sigma_x dA \cos \theta - \tau_{xy} dA \sin \theta - \tau_{xy} dA \tan \theta \cos \theta - \sigma_y dA \tan \theta \sin \theta = 0$$

$$\sum F_t = 0 \rightarrow \frac{dA}{\cos \theta} \tau - \sigma_x dA \sin \theta + \tau_{xy} dA \cos \theta - \tau_{xy} dA \tan \theta \sin \theta - \sigma_y dA \tan \theta \cos \theta = 0.$$

Eliminando dA y multiplicando por $\cos \theta$,

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau = \sigma_x \sin \theta \cos \theta - \sigma_y \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

Estas expresiones se transforman fácilmente en las fórmulas buscadas:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4.10a)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (4.10b)$$

Disponemos pues de fórmulas que permiten obtener la tensión normal y la tensión tangencial sobre planos ortogonales al eje z con orientaciones arbitrarias, definidas por el ángulo θ .

Las tensiones σ y τ pueden interpretarse como las componentes del denominado **vector tensión** que actúa sobre el plano con la orientación definida por θ . Este vector representa la fuerza por unidad de superficie que el resto del sólido ejerce sobre el plano inclinado en el punto considerado. σ y τ también se denominan **componentes intrínsecas de la tensión** sobre dicho plano.

No obstante, dado que el empleo de las fórmulas obtenidas no es práctico, vamos a introducir en el siguiente epígrafe una herramienta gráfica para la obtención de las componentes intrínsecas.

4.5. Círculo de Mohr

Si elevamos al cuadrado y sumamos las expresiones (4.10) obtenemos:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2,$$

o bien

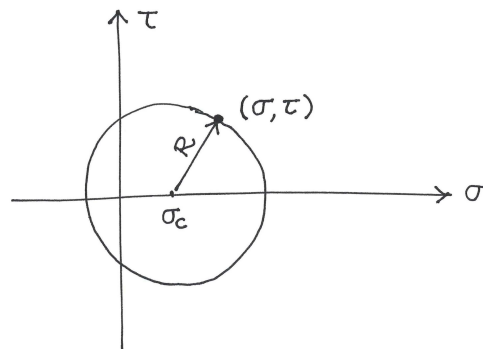
$$(\sigma - \sigma_c)^2 + \tau^2 = R^2 \quad (4.11)$$

con

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (4.12a)$$

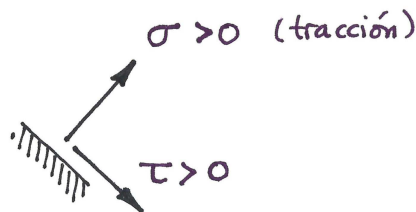
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}. \quad (4.12b)$$

La ecuación (4.11) indica que los pares (σ, τ) que definen las componentes intrínsecas de la tensión que actúan sobre cualquier plano que contiene al eje z en un punto del sólido, describen una circunferencia de centro $(\sigma_c, 0)$ y radio R en el plano definido por los ejes coordenados $\{\sigma, \tau\}$. Esta circunferencia se denomina *Círculo de Mohr*⁵ y es una **representación geométrica del estado tensional en un punto del sólido**.



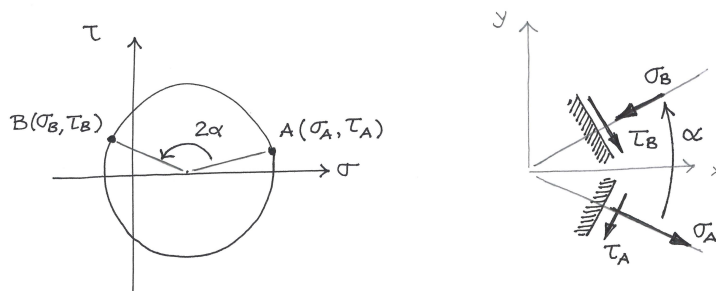
Las siguientes propiedades se deducen de las ecuaciones anteriores:

1. Un determinado plano en un punto del sólido sobre el que actúan las componentes intrínsecas σ y τ se corresponde con un punto de la circunferencia definido por el par (σ, τ) .
2. Para representar el par (σ, τ) es necesario emplear el **criterio de signos** definido por la siguiente figura, que es con el que se ha deducido las fórmulas (4.10), que es diferente del criterio definido en la figura 4.10 correspondiente a las fórmulas en las que se usa la notación clásica.

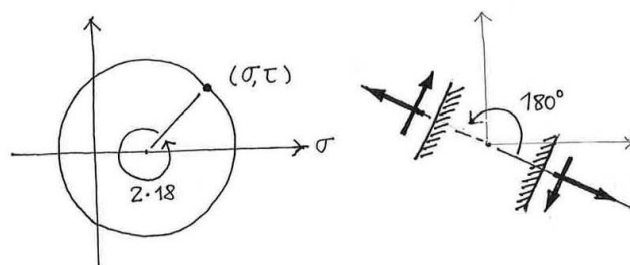


3. Las componentes intrínsecas de la tensión sobre dos planos cuyas normales forman un ángulo α se corresponden con dos puntos sobre la circunferencia separados por un ángulo 2α . Esto se deduce también de las fórmulas (4.10).

⁵Su creador fue el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918). La denominación tradicional es imprecisa, ya que se trata de una circunferencia, no de un círculo, pero su aceptación es amplia en la literatura técnica en castellano.

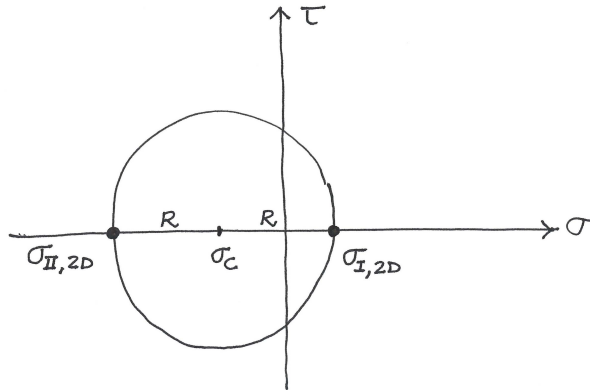


4. En la operación anterior los sentidos de giro se conservan (el círculo se recorre en el mismo sentido en el que se gira en el sólido para observar las componentes intrínsecas sobre planos distintos).
5. Un mismo punto del círculo representa las componentes intrínsecas que actúan sobre un determinado plano, y también sobre su opuesto (ya que una vuelta completa en el círculo corresponde a una diferencia de 180° en las normales en el sólido).



4.6. Tensiones y direcciones principales. Tensión tangencial máxima

Dado que el centro del Círculo de Mohr se encuentra siempre sobre el eje de abscisas, los cortes de la circunferencia con el eje σ son respectivamente los valores máximo y mínimo de la tensión normal que se dan en ese punto del sólido. Los cortes corresponden a los puntos $(\sigma_{I,2D}, 0)$ y $(\sigma_{II,2D}, 0)$. Por lo tanto, sobre los planos correspondientes la tensión tangencial es nula. Las normales a dichos planos forman un ángulo de 90° entre sí, ya que los puntos son diametralmente opuestos, y se denominan **direcciones principales de la tensión** del problema de tensión plana. Las tensiones normales asociadas, $\sigma_{I,2D}$ y $\sigma_{II,2D}$, se denominan **tensiones principales**. El subíndice $2D$ hace referencia a que, por el momento, estamos analizando un problema de tensión plana.

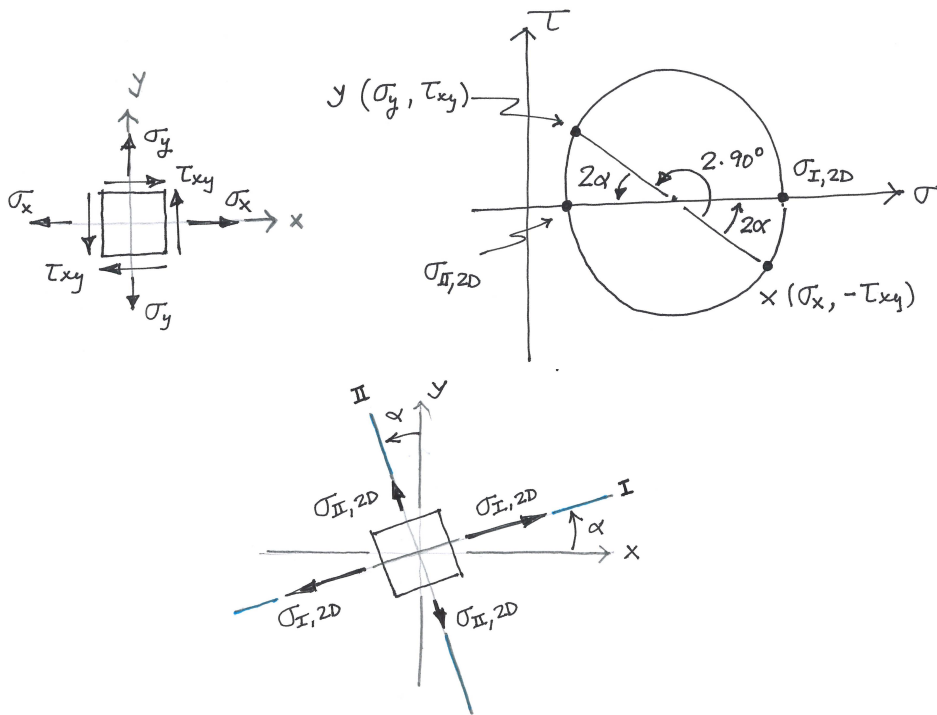


El valor de las tensiones principales es de obtención inmediata teniendo en cuenta su posición respecto al centro del círculo:

$$\sigma_{I,2D} = \sigma_c + R \quad (4.13a)$$

$$\sigma_{II,2D} = \sigma_c - R. \quad (4.13b)$$

La orientación de la dirección principal I respecto del eje x queda definida por la mitad del ángulo que definen el punto $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ –componentes intrínsecas de la tensión sobre un plano perpendicular al eje x – y el punto $(\sigma_{I,2D}, 0)$ –correspondiente a la tensión principal mayor–, con su sentido correspondiente. La segunda dirección, como se ha mostrado antes, es ortogonal a la primera. El estado tensional representado en planos correspondientes a las direcciones principales es:



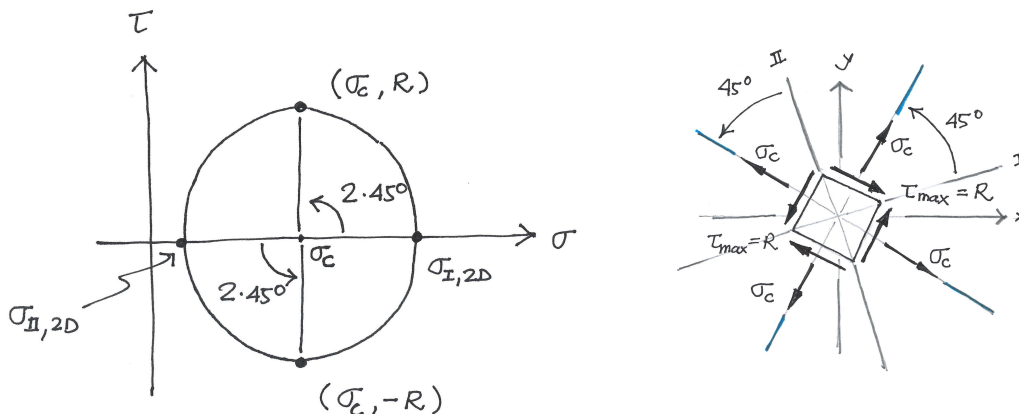
4.6. Tensiones y direcciones principales. Tensión tangencial máxima

Es necesario aclarar que esta representación **no es un estado tensional distinto del representado inicialmente**. Se trata del mismo estado tensional sobre planos con orientaciones distintas de las ortogonales a los ejes coordenados.

Por otra parte, los puntos de la circunferencia situados sobre el centro, definidos por los pares (σ_c, R) y $(\sigma_c, -R)$, son aquellos en los que la tensión tangencial es máxima. Podemos pues afirmar que el valor de la tensión tangencial máxima es igual al radio del círculo de Mohr:

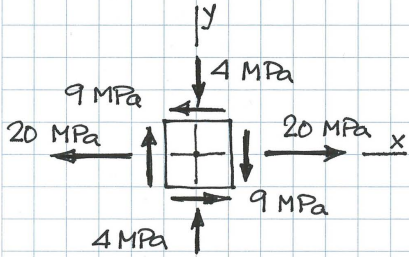
$$\tau_{max} = R. \quad (4.14)$$

Las orientaciones de los planos correspondientes forman 45° con las direcciones principales, ya que los puntos mencionados se sitúan a 90° de los cortes con los ejes coordenados.



4. CONCEPTOS ELEMENTALES DE ELASTICIDAD

M 4.3



Un punto de un sólido está sometido al estado tensional plano indicado en la figura. Determinar usando el círculo de Mohr: a) Las tensiones y direcciones principales de la tensión, b) Las componentes intrínsecas de la tensión

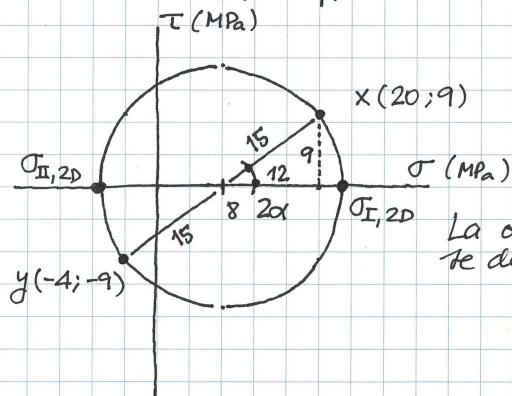
Sobre un plano cuya normal forma un ángulo de 40° con el eje y (sentido antihorario), c) las tensiones tangenciales máximas y los planos sobre los que actúa, d) las orientaciones de los planos sobre los que la tensión tangencial vale 12 MPa, e) las orientaciones de los planos sobre los que la tensión normal es nula. y (+) f) las orientaciones de los planos sobre los que el módulo del vector tensión es igual a 20 MPa

a) Para obtener las tensiones principales debemos representar el círculo de Mohr correspondiente al estado tensional de la figura.

Con el criterio de signos empleado para el círculo ($\sigma > 0$, $\tau > 0$) el punto correspondiente al plano normal a x es $(20; 9)$ MPa y el punto correspondiente al plano normal a y es $(-4; -9)$ MPa.

Entonces $\sigma_c = \frac{20-4}{2} = 8 \text{ MPa}$ ($\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$), y de la figura

$$R = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ MPa}$$



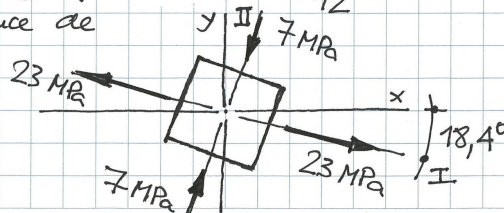
Entonces las tensiones principales son

$$\sigma_{I,2D} = \sigma_c + R = 23 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II,2D} = \sigma_c - R = -7 \text{ MPa}$$

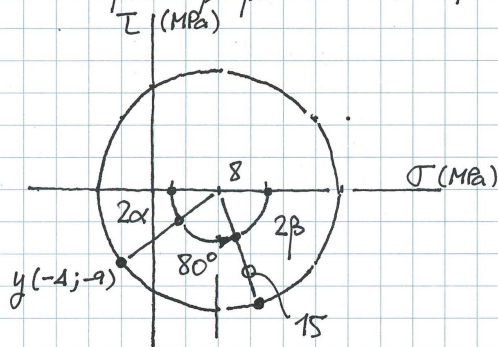
La orientación se deduce de

$$\tan 2\alpha = \frac{9}{12} \rightarrow \alpha = 18,4^\circ$$

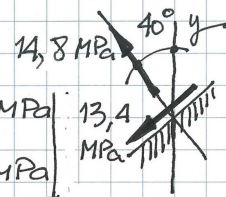


4.6. Tensiones y direcciones principales. Tensión tangencial máxima

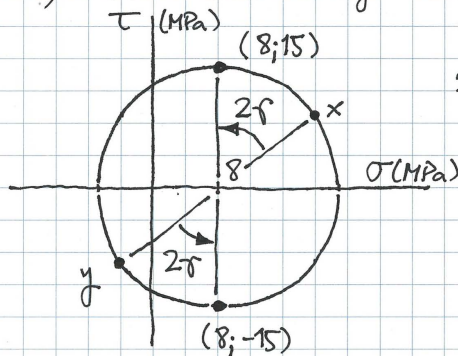
b) Debemos obtener el punto correspondiente del círculo moviéndonos $2 \times 40^\circ$ en sentido antihorario respecto del punto que representa el plano perpendicular al eje y



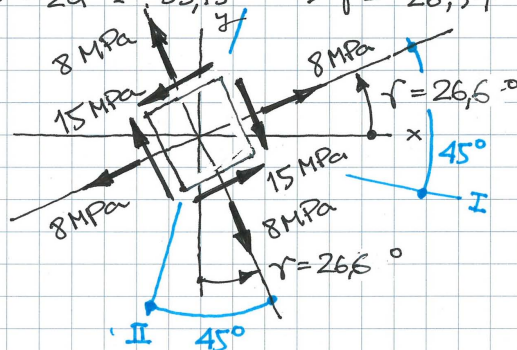
Del apartado anterior $2\alpha = 36,87^\circ$
 $\hookrightarrow 2\beta = 180^\circ - 80^\circ - 36,87^\circ = 63,13^\circ$
 Entonces
 $\sigma = 8 + 15 \cos 2\beta = 14,8 \text{ MPa}$
 $\tau = -15 \sin 2\beta = -13,4 \text{ MPa}$



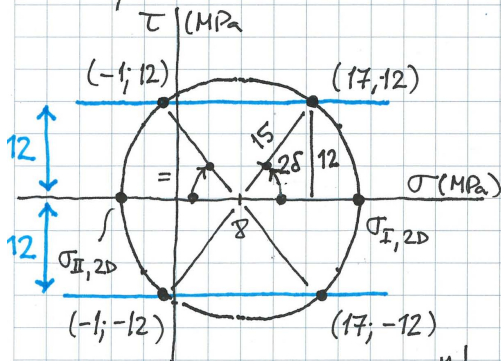
c) Las tensiones tangenciales máximas se deducen directamente:



$\tau_{max, 2D} = 15 \text{ MPa}$ (igual al radio)
 $2\gamma = 90^\circ - 2\alpha = 53,13^\circ \hookrightarrow \gamma = 26,57^\circ$



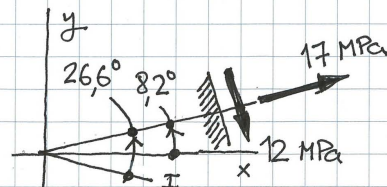
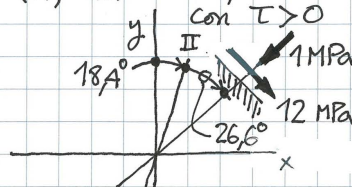
d) Las obtenemos mediante un razonamiento geométrico sencillo: cortar el círculo con dos paralelas a 12 MPa del eje σ



De la figura se deduce

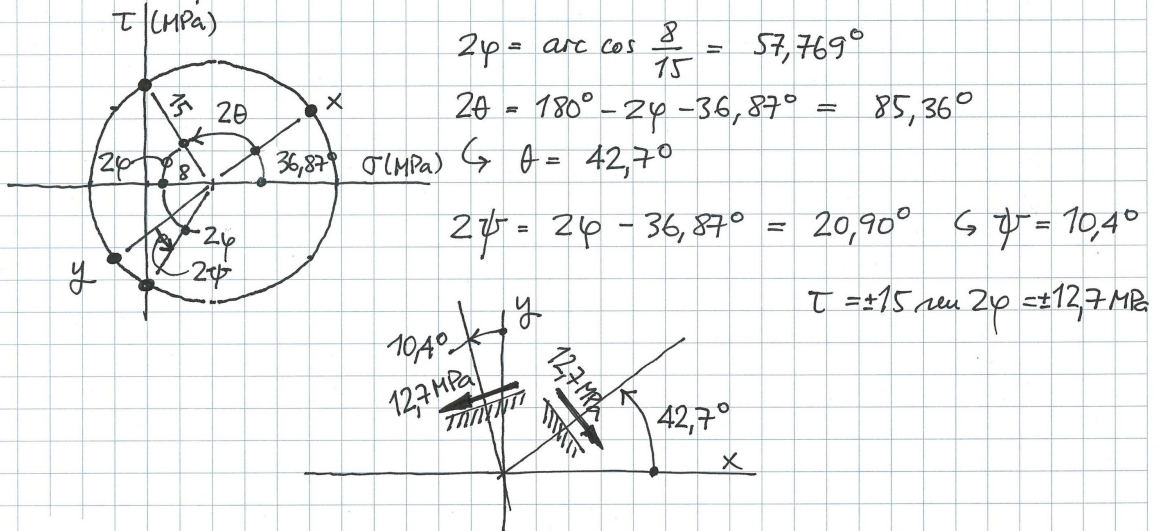
$2\delta = \arcsin \frac{12}{15} = 53,13^\circ$, entonces
 $\sigma = 8 + 15 \cos 53,13^\circ = 17 \text{ MPa}$, o bien
 $\sigma = 8 - 15 \cos 53,13^\circ = -1 \text{ MPa}$

Representamos únicamente las soluciones con $\tau > 0$

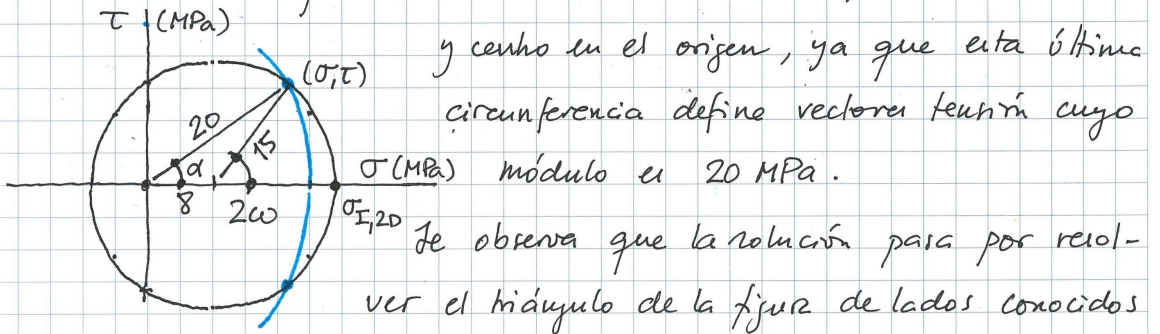


4. CONCEPTOS ELEMENTALES DE ELASTICIDAD

e) Las orientaciones de los planos sobre los que $\tau = 0$ se obtienen a partir de los cortes de la circunferencia con el eje de ordenadas



(+) f) En este caso las soluciones serán los puntos de intersección de la circunferencia de Mohr con una circunferencia de radio 20.



El ángulo α se obtiene mediante el teorema del coseno:

$$15^2 = 20^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 20 \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = 0,74688 \rightarrow \alpha = 41,6796^\circ$$

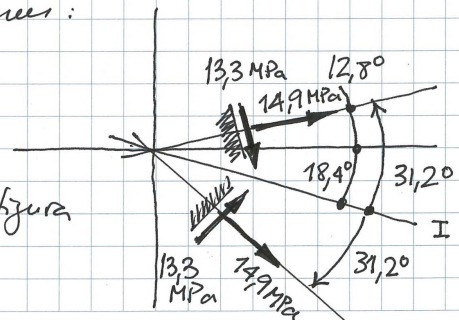
$$\text{Entonces } 20 \sin \alpha = 15 \sin 2\omega \rightarrow 2\omega = 62,451^\circ \rightarrow \omega = 31,2^\circ$$

Las componentes de la tensión serán pues:

$$\sigma = 8 + 15 \cos 62,451^\circ = 14,9 \text{ MPa}$$

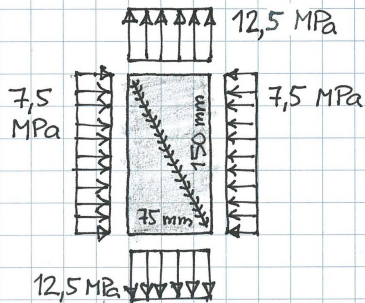
$$\tau = \pm 15 \sin 62,451^\circ = \pm 13,3 \text{ MPa}$$

Las orientaciones se observan en la figura



4.6. Tensiones y direcciones principales. Tensión tangencial máxima

M 4.4

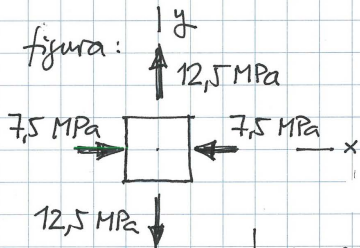


Una laja rectangular de acero está formada por dos partes triangulares soldadas como se muestra en la figura. La laja está sometida a las tracciones y compresiones mostradas.

a) Determinar las componentes normal y tangencial de la tensión sobre el cordón de soldadura

b) ¿En qué orientación se debería disponer el cordón de soldadura para que sobre él el vector tensión no tuviese componente normal?

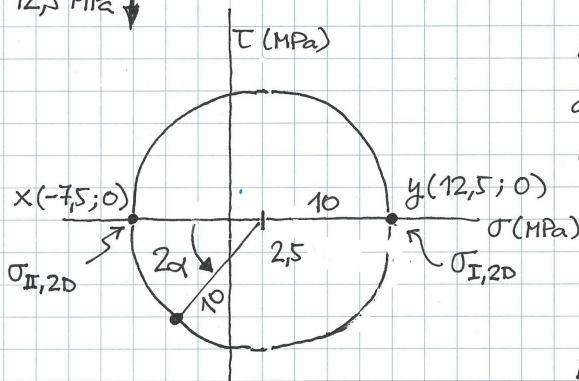
a) En primer lugar se constata que todos los puntos de la laja se encuentran sometidos al mismo estado tensional plano representado por esta



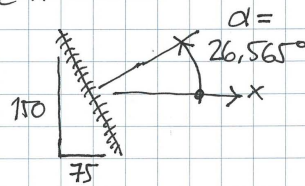
El círculo de Mohr quede definido por:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-7,5 + 12,5}{2} = 2,5 \text{ MPa}$$

$$R = 12,5 - 2,5 = 10 \text{ MPa (de la figura.)}$$



El plano de la soldadura forma un ángulo $\alpha = \arctan \frac{75}{150} = 26,565^\circ$ con el eje x



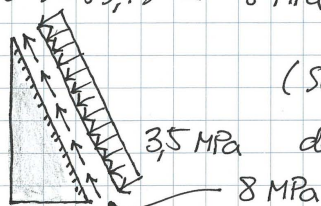
Las componentes intrínsecas sobre el plano de la soldadura

$$\sigma = 2,5 - 10 \cos 53,13^\circ = -3,5 \text{ MPa}$$

$$\tau = -10 \sin 53,13^\circ = -8 \text{ MPa}$$

El punto sobre el círculo forma un ángulo $2\alpha = 53,13^\circ$ respecto al punto que define el plano perpendicular a x

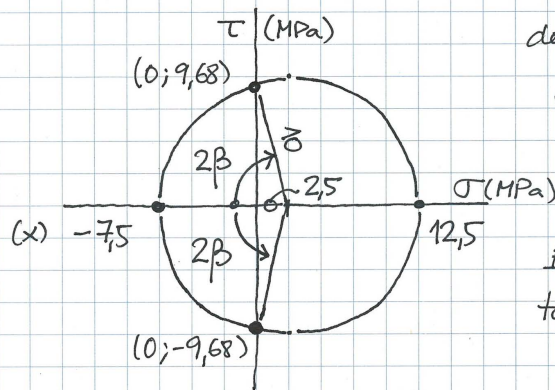
Entonces:



(Sólo se ha representado las componentes de la tensión sobre el plano de la soldadura)

4. CONCEPTOS ELEMENTALES DE ELASTICIDAD

b) Del círculo de Mohr podemos obtener las orientaciones sobre las que la tensión normal es nula. Serán los puntos de corte del círculo con el eje de ordenadas. Existen pues



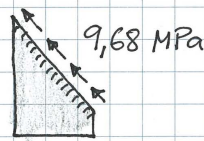
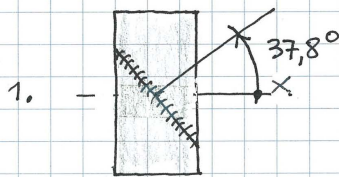
dos orientaciones posibles

$$\hookrightarrow 2\beta = \arccos \frac{2,5}{10} = 75,52^\circ$$

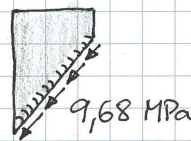
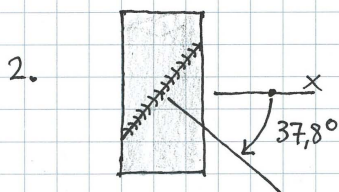
luego $\beta = 37,8^\circ$ medidos desde el eje x.

En ese caso el valor de la tensión tangencial es $\tau = 10 \sin 75,52^\circ = 9,68$ MPa

Las dos soluciones son (recordemos que hay que conservar los sentidos de giro)

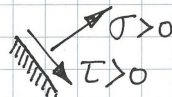


solución correspondiente al punto $(0; -9,68)$ MPa



solución correspondiente al punto $(0; +9,68)$ MPa

El sentido de las tensiones tangenciales se ha determinado lógicamente con el sentido de signos del círculo:



4.7. Estados tensionales tridimensionales. Círculo de Mohr en 3D

Consideremos un elemento de volumen de un sólido en estado de tensión plana. Hemos visto que existen dos direcciones perpendiculares en las que definen planos sobre los que únicamente actúan tensiones normales (las tensiones principales). Sobre los planos definidos por la dirección perpendicular a las anteriores no actúan tensiones en el estado de tensión plana. Si ahora superponemos otro estado tensional en el que únicamente actúan tensiones normales en esa dirección, el resultado es un **estado tensional tridimensional**.

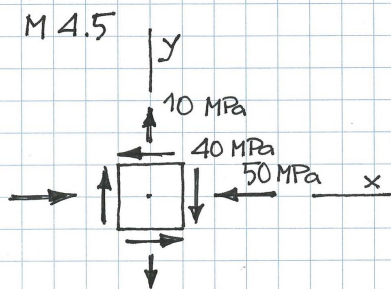
Figura

La figura es por lo tanto la representación de un estado tensional tridimensional según las direcciones principales. No existen pues tensiones tangenciales sobre los planos perpendiculares a ellas. Si aislamos ahora un elemento de sólido alrededor de ese mismo punto cortando por planos definidos por orientaciones diferentes de las principales (supongamos que se trata de los planos definidos por las direcciones x, y, z) sobre las caras del elemento actuarán tensiones normales, pero también tensiones tangenciales. Esta es la representación general del estado tensional tridimensional:

Figura

Volviendo a la representación del estado tensional según las direcciones principales, podemos considerar cada pareja de direcciones por separado y dibujar el correspondiente círculo. Explicación Figuras Tensiones principales. Valores extremos de la tensión normal. Notación Tensión tangencial máxima. Relación con las tensiones principales. Orientaciones Caso de triple tracción Caso de corte puro

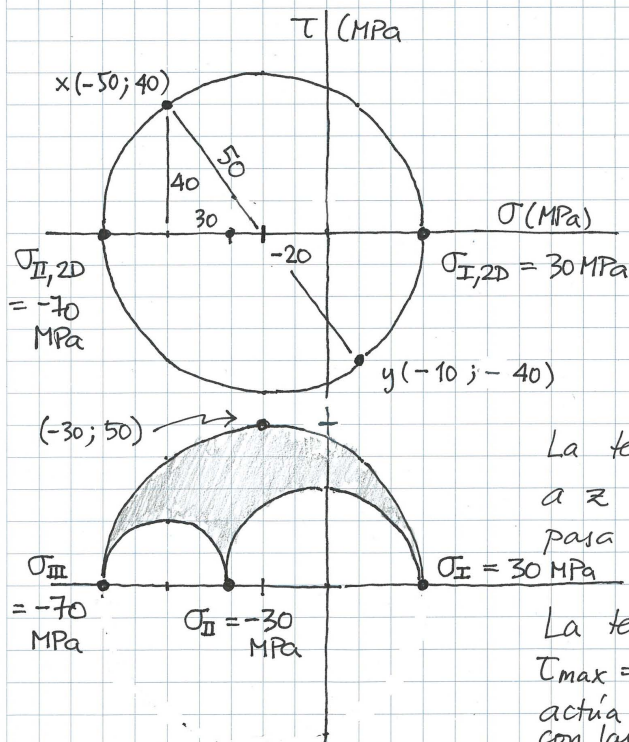
4. CONCEPTOS ELEMENTALES DE ELASTICIDAD



El estado tensional en un punto del interior de una presa el estado tensional está definido por el esquema de la figura más una compresión sobre el plano perpendicular al eje z de módulo 30 MPa.

Representar el círculo de Mohr del estado tensional tridimensional y obtener la tensión tangencial máxima indicando sobre qué planos actúa.

En primer lugar notamos que la compresión sobre el plano perpendicular a z es una de las tensiones principales, ya que las tensiones tangenciales sobre ese plano son nulas, y z es una dirección principal. Entonces las otras dos direcciones están contenidas en el plano $\{x, y\}$. Representamos el círculo correspondiente.



$$\sigma_c = \frac{-50+10}{2} = -20 \text{ MPa}$$

$$2\alpha = \arctan \frac{4}{3} = 53,13^\circ$$

$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{I,2D} = -20 + 50 = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II,2D} = -20 - 50 = -70 \text{ MPa}$$

La tensión sobre el plano perpendicular a z es $\sigma_{II} = -30$ MPa y 70 MPa pasa a ser la tercera

La tensión tangencial máxima es $\tau_{max} = 50$ MPa (radio del círculo I-III) actúa sobre planos que formen 45° con las direcciones I y III

Fundamentos de la teoría de vigas de Navier–Bernoulli

El Análisis de Estructuras se fundamenta en el estudio del comportamiento mecánico de sus componentes. En el caso de las estructuras formadas por barras, el estudio del modo en que se deforman cuando son solicitadas por cargas exteriores o cambios de temperatura, así como el reparto de tensiones debidas a las distintas sollicitaciones se denomina **Teoría de Vigas** y ha dado lugar a la disciplina tradicionalmente llamada **Resistencia de Materiales**.

La teoría de vigas es un modelo matemático simplificado de la respuesta elástica de la barra considerada como sólido deformable. La simplificación o paso del problema elástico tridimensional al problema unidimensional se lleva a cabo postulando una hipótesis acerca del modo en el que las secciones transversales se mueven y cambian de forma (**hipótesis cinemática**). Cuanto más elaborada sea la hipótesis cinemática, mejor reproducirá la teoría el comportamiento de la viga, pero más complicada será su formulación matemática. En la mayor parte de los problemas que vamos a tratar es suficiente admitir la siguiente hipótesis:

Las secciones transversales de la viga (inicialmente planas y perpendiculares a la directriz de la misma) permanecen planas y perpendiculares a la directriz deformada después de la actuación de las cargas.

Esta es la denominada **Hipótesis de Navier–Bernoulli** y se formuló para el estudio de problemas de flexión y extensión de vigas. En este capítulo vamos a construir la teoría de vigas a partir de los tres *problemas elementales* que la definen:

- El **problema de extensión**. Trata del estudio del alargamiento o acortamiento de barras sometidas a tracción o compresión.
- El **problema de flexión**. Estudia el fenómeno de flexión de una viga
- El **problema de torsión**. Se refiere a las situaciones en las que una barra es solicitada por pares cuyo eje es paralelo a su directriz.

Adicionalmente la teoría de vigas clásica hace uso de la denominada **hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones**. Con esta hipótesis se simplifica la obtención de relaciones geométricas: el seno y la tangente se aproximan por el ángulo. La consecuencia práctica de esta hipótesis es que es posible establecer el equilibrio de la viga *en la geometría*

anterior a la deformación, lo que supone una simplificación sustancial del problema. Esta hipótesis pierde validez en el análisis de elementos estructurales muy esbeltos y en el análisis de la inestabilidad estructural (pandeo o abolladura).

5.1. Extensión

5.1.1. Tracción (compresión) pura

El problema elemental de extensión es precisamente el caso estudiado en la sección 4.1: la barra de longitud L y sección constante A sometida a la acción de fuerzas iguales de magnitud F y de sentido opuesto en sus extremos (suponiendo despreciable su peso). En este caso decimos que la barra se encuentra solicitada en **tracción o compresión pura**.

Sobre los puntos de una sección transversal cualquiera actúa una tensión normal de valor $\sigma = F/A$ –ecuación (4.2)–. Admitiendo que el material tiene un comportamiento elástico lineal, la ley de Hooke ($\sigma = E \epsilon$) establece la proporcionalidad entre la tensión normal y el alargamiento unitario en este problema. Sustituyendo la definición de alargamiento unitario ($\epsilon = \delta/L$) en la ley de Hooke, se puede expresar el alargamiento total de la barra (δ) en función de la tracción F , y de las características mecánicas y geométricas de la barra

$$\delta = \frac{FL}{EA}. \quad (5.1)$$

Esta expresión sólo es válida para la barra en tracción simple (sección constante y tracción constante a lo largo de toda la pieza).

Rigidez y flexibilidad

Podemos entender el comportamiento de la barra del mismo modo que analizamos el de un muelle: en la expresión anterior se observa que el alargamiento total de la barra es proporcional a la fuerza que se aplica en sus extremos

$$F = k \delta \quad \text{con} \quad k = \frac{EA}{L}. \quad (5.2)$$

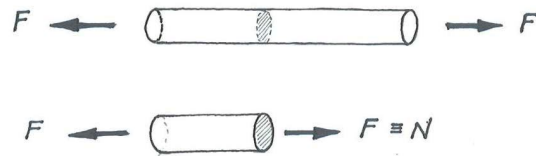
Denominamos **rigidez de la barra** (en el problema de extensión) al parámetro k , que es directamente proporcional al módulo de elasticidad del material y al área de la sección transversal, e inversamente proporcional a la longitud de la barra. Sus dimensiones físicas son $[F L^{-1}]$.

El parámetro inverso f determina la **flexibilidad de la barra** (en el problema de extensión) de modo que

$$\delta = f F \quad \text{con} \quad f = \frac{L}{EA}. \quad (5.3)$$

5.1.2. Esfuerzo axial

Si aislamos una parte de la barra cortando por una sección cualquiera de la misma, sobre los puntos de la sección actúa una distribución uniforme de tensiones normales σ (sección 4.1). Teniendo en cuenta el equilibrio del fragmento de barra, la resultante de las tensiones normales debe ser igual a la tracción F aplicada en el extremo (ec. (4.1)).



Este razonamiento coincide con las Definiciones A y C de *esfuerzo* introducidas en la sección 2.2.3, por tanto, definimos el **esfuerzo axial** N , asociado al problema de extensión, como la fuerza interna sobre una sección necesaria para mantener en equilibrio una parte de la barra, o bien como la resultante de tensiones normales sobre la sección debidas a la tracción (compresión). El esfuerzo axial es perpendicular a la sección transversal (como las tensiones normales), tiene la dirección del eje de la barra, y es la resultante de las tensiones normales sobre la sección (recuérdese que en el tracción pura la tensión normal es uniforme y por eso puede salir de la integral):

$$N = \iint_A \sigma \, dA = \sigma A \quad (5.4)$$

Criterio de signos

El esfuerzo axial se considera positivo cuando es de tracción, y viceversa. Generalmente se representa sobre la rebanada tal como se indica en la figura:

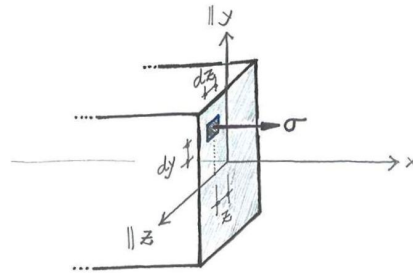


Obsérvese que, sobre la cara frontal de la rebanada, el *axil positivo* es un vector que apunta en el sentido de avance del eje x .

Punto de paso del esfuerzo axial sobre la sección

Para determinar el punto de paso del axil sobre la sección, y teniendo en cuenta que es estáticamente equivalente a la distribución de tensiones normales, consideramos un sistema de referencia formado por:

- el eje x , paralelo al eje de la barra,
- los ejes y, z contenidos en el plano de la sección transversal.



Tomando momentos de las tensiones respecto, por ejemplo, del eje y ,

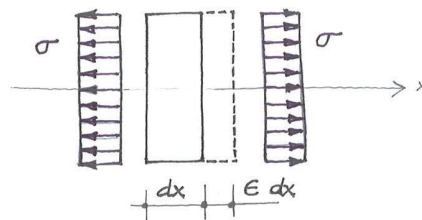
$$\iint_S z \sigma \, dydz = \sigma \iint_S z \, dydz = \sigma A z_G = N z_G, \quad (5.5)$$

donde z_G es la coordenada z del centro geométrico de la sección transversal S . Tomando momentos respecto del eje z se llega a una expresión análoga que permite concluir que *el esfuerzo axial pasa por el centroide de la sección transversal*.

Salvo que se indique lo contrario, en adelante supondremos que el eje x del sistema de referencia de la viga pasa por el centroide de las secciones transversales.

5.1.3. Alargamiento unitario de la directriz

Consideremos una rebanada de espesor dx . Todos sus segmentos paralelos a la directriz experimentan el mismo alargamiento unitario ϵ cuando las caras están sometidos a la tracción normal σ .



Podemos definir la variable del modelo ϵ , **alargamiento unitario de la directriz**, que estará asociada a cada uno de los puntos de la directriz, de modo que su valor sea igual al alargamiento unitario ϵ de los correspondientes segmentos diferenciales paralelos a la directriz. Aunque en el caso de la barra en tracción pura el valor de esta variable será constante en toda la barra, en un caso más general dependerá de la sección considerada, es decir, de x :

$$\epsilon = \epsilon(x). \quad (5.6)$$

El alargamiento unitario de la directriz es una de las deformaciones del modelo viga.

Introducimos ahora la variable $u(x)$, desplazamiento de los puntos de la directriz a lo largo del eje x . El incremento de longitud de la rebanada de espesor dx será du . Este incremento,

también llamado **alargamiento total de la rebanada** se obtendrá multiplicando el alargamiento unitario de la directriz por el espesor (longitud) de la rebanada: $du = \epsilon dx$. Dado que sobre la rebanada actúa el esfuerzo axial N , podemos escribir la expresión análoga a (5.1)

$$du = \epsilon dx = \frac{N}{EA} dx. \quad (5.7)$$

Esta expresión resulta útil para calcular el alargamiento total en un tramo de barra sometido a un esfuerzo axial variable.

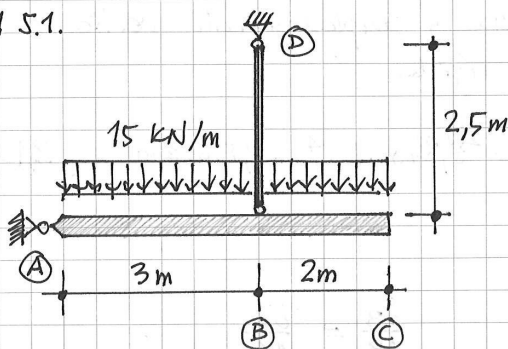
5.1.4. Ecuación constitutiva de la extensión

Despejando el axial en la expresión del alargamiento total de la rebanada, y considerando que en un caso general el axial y el alargamiento unitario serán variables a lo largo de la directriz, se obtiene

$$N = EA \epsilon. \quad (5.8)$$

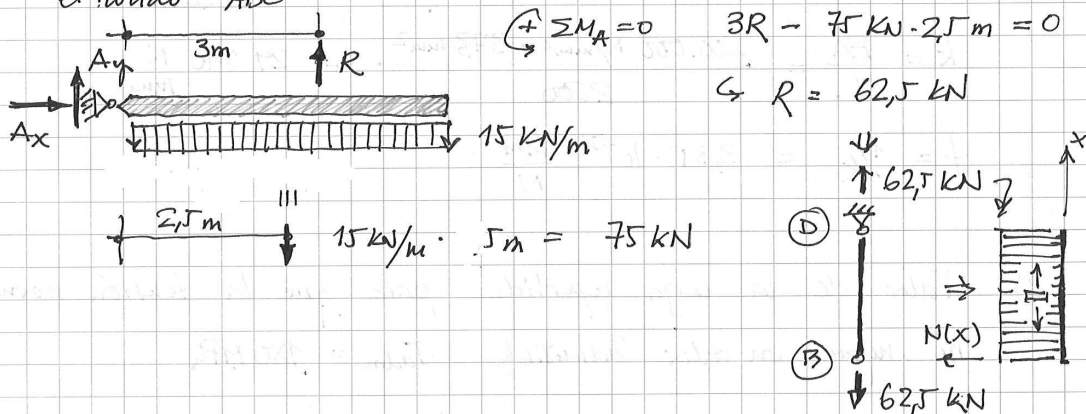
Esta es la **ecuación constitutiva del problema de extensión**, que relaciona la magnitud del esfuerzo axial con el alargamiento unitario de la directriz. El producto EA es la **rigidez axial** del modelo viga en cada sección transversal.

M. 5.1.



La figura muestra una barra rígida ABC suspendida mediante el tubo BD, articulado en sus extremos. El tubo tiene un diámetro externo de 48,3 mm y un espesor de 2,6 mm. Es de acero, con $E = 200 \text{ GPa}$ y $\nu = 0,3$

- a) Representar el diagrama de axiles en el tubo debido a la carga. Para ello calculamos la fuerza en el extremo B del tubo aislando el sólido ABC:



- b) Obtener y representar las tensiones normales en una sección genérica del tubo y el valor del alargamiento unitario de la derecha.

En una sección genérica σ es uniforme y vale:

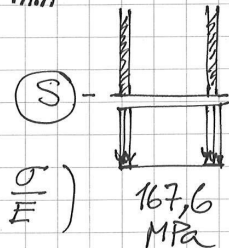
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{62500 \text{ N}}{373 \text{ mm}^2} = 167,6 \text{ MPa}$$

$$A = \pi D \cdot t = \pi (48,3 - 2,6) \cdot 2,6 \text{ mm}^2 = 373 \text{ mm}^2$$

con $D \equiv$ diámetro de la línea media
 $t \equiv$ espesor del tubo

A partir de la ecuación constitutiva $\epsilon = \frac{N}{EA} \left(= \frac{\sigma}{E} \right)$

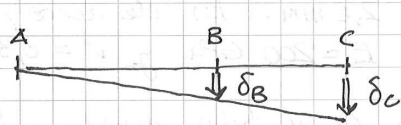
$$\epsilon = \frac{62500 \text{ N}}{200.000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 373 \text{ mm}^2} = 8,378 \cdot 10^{-4}$$



- c) Alargamiento de la barra BD y desplazamiento vertical del punto C de la viga rígida

$$\delta_B = \frac{NL}{EA} = \epsilon \cdot L = 8,378 \cdot 10^{-4} \cdot 2500 \text{ mm} = \underline{2,1 \text{ mm}} (\downarrow)$$

Desplazamiento de C



$$\frac{\delta_B}{AB} = \frac{\delta_C}{AC}$$

$$\hookrightarrow \delta_C = \frac{5}{3} \delta_B = \underline{3,5 \text{ mm}} (\downarrow)$$

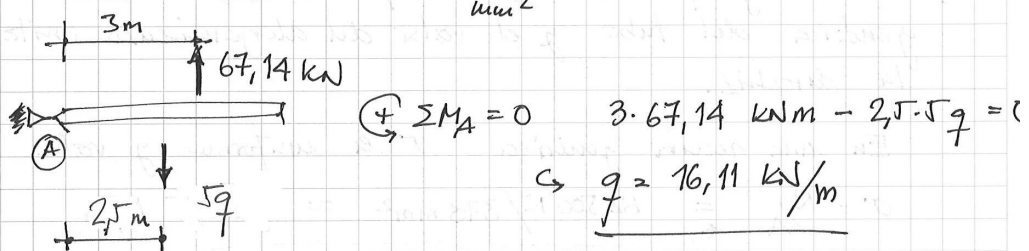
- d) Rigidez de la barra BD (en N/mm). Flexibilidad de la barra

$$k = \frac{EA}{L} = \frac{200.000 \text{ N/mm}^2 \cdot 373 \text{ mm}^2}{2500} = \underline{29.840 \frac{\text{N}}{\text{mm}}}$$

$$f = 1/k = \underline{3,35 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{N}}}$$

- e) Valor de la carga repartida para que la tensión normal no supere un valor admisible $\sigma_{adm} = 180 \text{ MPa}$

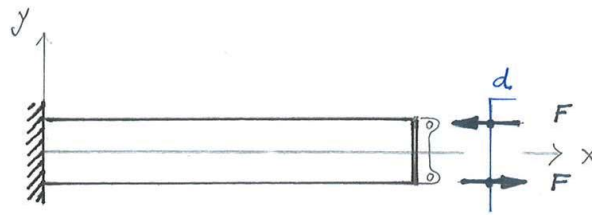
$$N_{adm} = \sigma_{adm} \cdot A = 180 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 373 \text{ mm}^2 = 67.140 \text{ N}$$



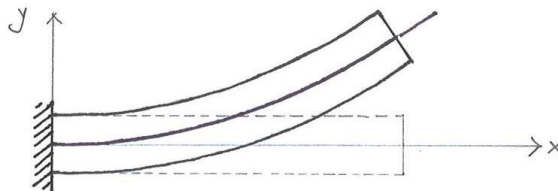
5.2. Flexión

5.2.1. Flexión pura

Consideramos ahora una barra de peso despreciable empotrada en un extremo y sometida mediante algún dispositivo a la acción de un par de magnitud Fd y sentido antihorario en su extremo libre. El eje del par es paralelo a uno de los ejes principales de inercia de la sección transversal. Analizando el equilibrio de la barra, la única reacción será un par del mismo valor y sentido opuesto.



Este tipo de sollicitación se denomina **flexión pura**, ya que la resultante de las fuerzas que producen el par es nula y la barra no está sometida a ningún otro tipo de acción. Si llevamos a cabo este experimento en un laboratorio podemos observar que la barra adquiere una forma curva, y que su curvatura es constante en todo su desarrollo. Es decir, en el caso de flexión pura la directriz deformada es un arco de circunferencia.



5.2.2. Momento flector

Procedemos ahora del mismo modo que hicimos en el problema de tracción pura, aislando una parte de la barra por una sección cualquiera de la misma. Sobre la sección de corte actuará una cierta distribución de tensiones, que aún no conocemos, necesaria para mantener el trozo de barra en equilibrio. En todo caso, para que exista equilibrio, la resultante de las tensiones debe ser únicamente un par de valor Fd , que denotamos M y denominamos **momento flector**, ya que es la magnitud estática responsable de la flexión de la barra. El momento flector es, según las Definiciones A y C de la sección 2.2.3 el *esfuerzo* asociado a la flexión.

Criterio de signos

Adoptamos el siguiente criterio: admitiendo que el eje y de la sección transversal apunta hacia arriba, el momento flector positivo comprime las fibras situadas sobre el semieje y positivo

y tracciona las fibras situadas sobre el semieje y negativo.



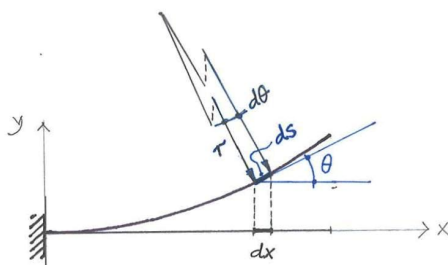
Considerado como vector, sobre la cara frontal de la rebanada, el momento flector positivo apunta en el sentido de avance del eje z .

5.2.3. Curvatura de la directriz

En la figura anterior, la deformación de la barra se ha representado de forma exagerada en el dibujo para mayor claridad. No obstante, debemos recordar que en todo el desarrollo teórico aceptamos la **hipótesis de pequeños desplazamientos**. Aplicándola al caso que nos ocupa, implica que el giro de la tangente a la directriz deformada $\theta(x)$ es muy pequeño. Por tanto, la relación entre el diferencial de longitud de la directriz antes de la deformación, dx , y después de la deformación, ds , es

$$dx = \cos \theta ds \simeq ds, \quad (5.9)$$

pues el coseno se puede aproximar por la unidad.



A su vez, el diferencial de longitud y el diferencial de giro se relacionan a través del radio de curvatura r ,

$$dx \simeq ds = r d\theta. \quad (5.10)$$

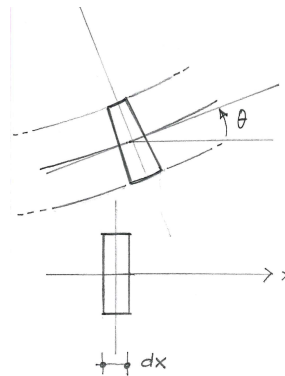
Aceptando la aproximación como válida se obtiene la ecuación que describe la cinemática del modelo, es decir, el cambio en el ángulo de giro de la tangente en función de la **curvatura de la directriz** κ :

$$d\theta = \kappa dx, \quad \text{con} \quad \kappa = 1/r. \quad (5.11)$$

Consideramos que la curvatura es positiva cuando un avance en el sentido positivo del eje x produce un incremento del giro ($d\theta > 0$). El ángulo positivo se determina mediante la regla de la mano derecha sobre el eje de giro correspondiente. En nuestro caso el eje de giro es el z y el sentido positivo es antihorario.

5.2.4. Tensiones sobre la sección transversal y ecuación constitutiva de la flexión

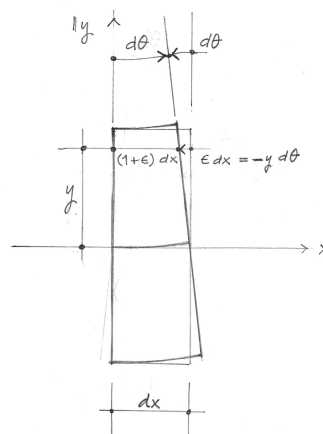
Habíamos visto que la flexión de la barra producirá tensiones sobre sus secciones transversales cuya distribución desconocemos. Para deducir el modo en el que estas tensiones se distribuyen sobre la sección recurrimos a la **hipótesis de Navier-Bernoulli**: se admite que las secciones transversales inicialmente perpendiculares a la directriz de la barra, que tras la actuación de las cargas experimentan un giro de valor θ , permanecen sin embargo planas y perpendiculares a la directriz deformada.



Como se aprecia en la figura, aunque las caras del elemento siguen siendo planas tras la deformación, dejan de ser paralelas y forman entre ellas un ángulo $d\theta$. Por tanto, cada fibra de la rebanada experimentará un cambio de longitud $\epsilon(y) dx$ (alargamiento o acortamiento, dependiendo del lado de la directriz en el que se encuentre).

$$\epsilon(y) dx = -y d\theta.$$

$\epsilon(y)$ es el alargamiento unitario de la fibra situada a una distancia y de la directriz. El signo de la ecuación se entiende observando la figura: para un cambio de ángulo $d\theta$ positivo, en el semieje y positivo las fibras se acortan, por tanto el alargamiento es negativo.



Empleando ahora la expresión (5.11) de la cinemática,

$$\epsilon(y) dx = -y d\theta = -y \kappa dx.$$

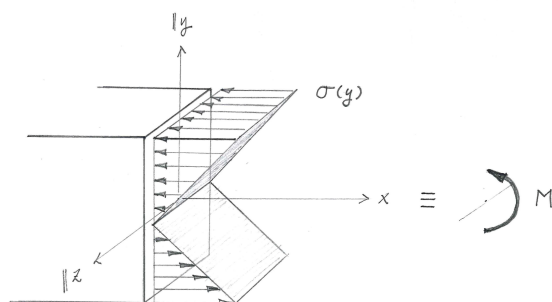
Por tanto, el alargamiento unitario de cada fibra depende de la curvatura de la directriz y de la distancia a la misma

$$\epsilon(y) = -\kappa y. \quad (5.12)$$

Admitimos ahora que *la ley de Hooke (4.4) se cumple en cada una de las fibras de la rebanada*. Entonces

$$\sigma(y) = E \epsilon(y) = -E \kappa y. \quad (5.13)$$

La distribución de tensiones normales sobre la sección transversal es pues lineal en la coordenada y que mide la distancia a la directriz, y se anula precisamente sobre ella.



Dado que sobre la sección transversal únicamente actúa un momento flector, la resultante de tensiones normales debe ser nula. Imponiendo esta condición se tiene

$$0 = \iint_S \sigma(y) dA = - \iint_S E \kappa y dA,$$

es decir

$$\iint_S y dA = 0.$$

La integral es precisamente el momento estático (momento de primer orden) de la sección transversal respecto al eje y . **De este modo se comprueba que el eje de la sección transversal sobre el que las tensiones se anulan** (que según la ecuación (5.13) es el eje y) **debe pasar por el centroide de la sección en el problema de flexión pura** ya que el momento estático correspondiente es nulo. Este eje sobre el que las tensiones normales son nulas se denomina **eje neutro** o **fibra neutra**.

Ecuación constitutiva de la flexión

Empleando ahora la equivalencia estática entre la distribución de tensiones y el momento flector (Definición C de esfuerzo), observamos que el momento flector debe ser igual al par de eje z que se obtiene sumando el par que producen las fuerzas infinitesimales $\sigma(y) dA$ que actúan sobre los diferenciales de área de la sección transversal (ver figura ff):

$$M = - \iint_S y \sigma(y) dA.$$

Sustituyendo la ecuación anterior y sacando de la integral el módulo de elasticidad y la curvatura, que tienen un valor constante en la sección, se obtiene la siguiente expresión

$$M = E \left(\iint_S y^2 dA \right) \kappa.$$

La integral es, precisamente, el momento de inercia de la figura formada por la sección transversal respecto del eje z , por tanto

$$M = EI \kappa, \quad (5.14)$$

que es la **ecuación constitutiva del problema elemental de flexión**. El producto EI es la **rigidez a flexión** del modelo viga en cada sección transversal.

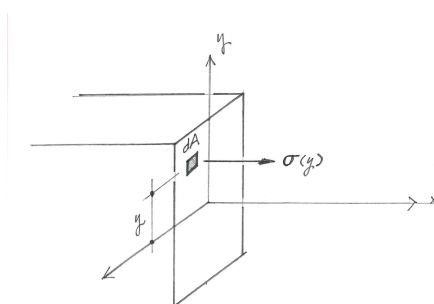
Por lo tanto, **cuando sobre una sección actúa un momento flector M cuyo eje es paralelo a uno de los ejes principales de inercia de la sección, el momento de inercia I correspondiente** (que debe emplearse en la fórmula que proporciona las tensiones y en la expresión de la rigidez a flexión) **es el de eje paralelo al del momento flector**.

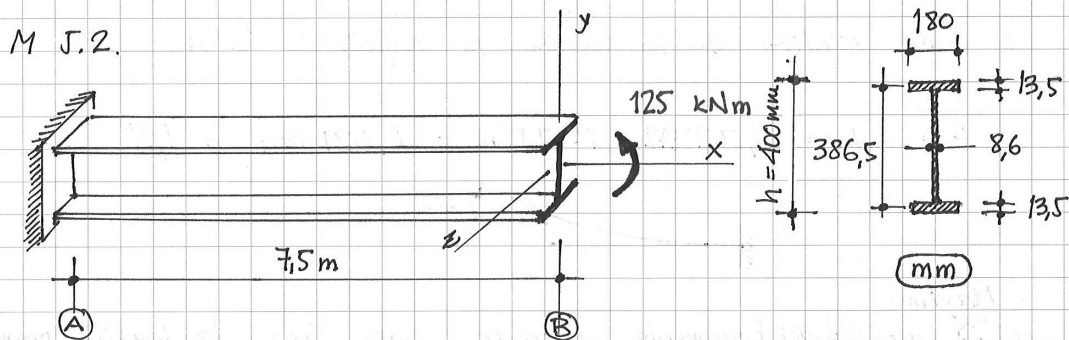
Distribución de tensiones en el problema de flexión pura

Despejando la curvatura en la ecuación constitutiva (5.14) y sustituyendo en la ecuación (5.13) se obtiene la expresión de las tensiones normales sobre la sección transversal en función de la distancia y a la directriz, y del momento flector que actúa sobre la sección:

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y. \quad (5.15)$$

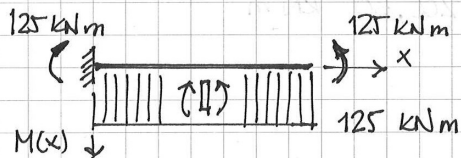
Con el sistema de referencia escogido, tanto el momento flector como el momento de inercia son de eje z . El signo negativo se comprende bien observando mediante la regla de la mano derecha que el momento flector que produce una tensión de tracción (positiva) que actúa sobre un elemento de área situado en la parte de la sección en la que la coordenada y es positiva, es negativo:





La figura muestra una viga en ménsula de acero laminado con la sección transversal indicada. El módulo de elasticidad del acero es 200 GPa y el coeficiente de Poisson 0,3.

a) Obtener las reacciones y el diagrama de momentos en la viga



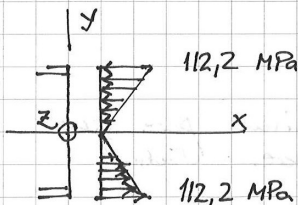
b) Obtener y representar las tensiones normales en una sección genérica, así como la curvatura de la direchiz debido al momento flector.

$$\sigma_y = -\frac{M}{I} y, \text{ con } I = I_z \quad (\text{fórmula 5.15})$$

$$I_z = \frac{1}{12} 8,6 \cdot 386,5^3 + 2 (180 \cdot 13,5) \cdot \left(\frac{386,5}{2}\right)^2 = 222\,877\,072 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_y = \frac{-125 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{222\,877\,072 \text{ mm}^4} y \quad \text{en } \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ con } y \text{ en mm}$$

$$\sigma_y = -0,5608 y \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 200 \text{ mm} \rightarrow \sigma_y = -112,2 \text{ MPa} \\ y = -200 \text{ mm} \rightarrow \sigma_y = +112,2 \text{ MPa} \end{array} \right.$$



La curvatura es

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (\text{fórmula 5.14})$$

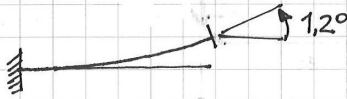
$$\kappa = \frac{125 \cdot 10^6 \text{ N mm}}{200 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 222\,877\,072 \text{ mm}^4} = 2,8042 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1} = 0,0028042 \text{ m}^{-1}$$

El radio de curvatura será $r = 1/\kappa = 356,6 \text{ m}$

5. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE VIGAS DE NAVIER-BERNOULLI

c) Giro relativo de la sección B respecto de la A

$$\theta = K L = 0,0028042 \text{ m}^{-1} \cdot 7,5 \text{ m} = 0,021 \text{ rad} = 1,2^\circ$$



d) Máximo valor del momento aplicado para que la tensión normal no supere un valor admisible $\sigma_{adm} = 180 \text{ MPa}$ en ningún punto de la sección.

$$|\sigma| = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} \leq \sigma_{adm} \rightarrow M \leq 2 \frac{I}{h} \sigma_{adm} = \frac{222.877.072}{200} \cdot 180$$

Puesto que la tensión es máxima en las fibras extremas de la sección

$$\hookrightarrow \underline{M \leq 200,60 \text{ kNm}}$$

e) Admitiendo que es posible modificar el canto h de la sección, ¿cuál es el mínimo valor de h para que no se supere σ_{adm} cuando el momento que solicita la viga es de 250 kNm ?

$$|\sigma| = \frac{M}{I(h)} \cdot \frac{h}{2} \leq \sigma_{adm} \rightarrow I(h)/h \geq M/2\sigma_{adm}$$

$$\left(\frac{1}{12} 8,6 \cdot (h-13,5)^3 + 2(180 \cdot 13,5) \cdot \left(\frac{h-13,5}{2} \right)^2 \right) / h \geq \frac{250 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{2 \cdot 180 \text{ N/mm}^2}$$

Resolviendo la ecuación* resulta

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = -2130,88 \\ h_2 = 0,3 \end{array} \right\} \text{ sin sentido físico}$$

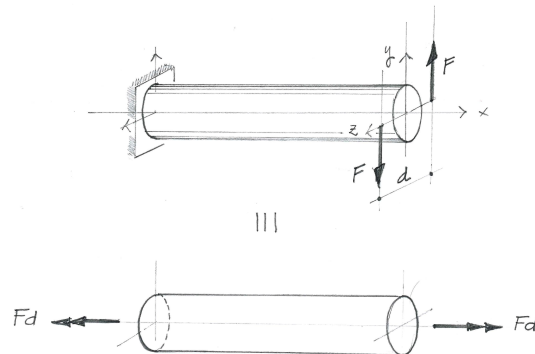
$$\boxed{h_3 = 475,7 \text{ mm}} \leftarrow \text{Canto mínimo para que no se supere } \sigma_{adm}$$

* se puede usar cualquier solver, por ejemplo Wolfram alpha

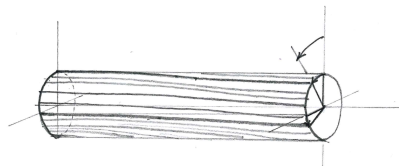
5.3. Torsión

5.3.1. Torsión pura

Denominamos torsión pura a la sollicitación de una barra de sección circular (o corona circular) mediante dos pares de magnitud Fd aplicados en sus extremos, de eje paralelo a la directriz de la barra, de igual magnitud y sentidos opuestos¹.



En esta situación se puede observar que las secciones de la barra experimentan un giro alrededor de su eje, giro que resulta ser proporcional a la distancia a una sección cualquiera que se tome como referencia.



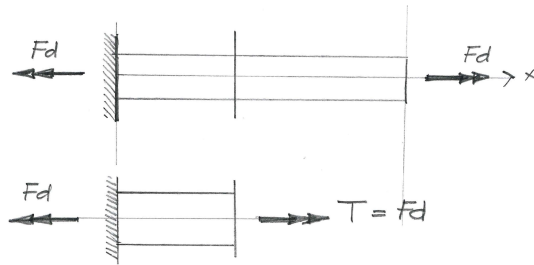
El problema de la torsión pura de barras de sección circular fue estudiado en primer lugar por Charles-Augustin de **Coulomb**² (1736–1806). Aunque desde un punto de vista estricto el estudio de la torsión no se encuadra dentro de lo que habitualmente se denomina *teoría de vigas de Navier-Bernoulli*, hemos preferido incluirlo como uno más de los problemas elementales de la teoría de vigas para lograr una presentación completa siguiendo el mismo razonamiento que en los problemas de extensión y de flexión.

5.3.2. Momento torsor

Siguiendo la metodología ya habitual en esta sección, aislamos una parte de la barra separándola por una sección cualquiera, sobre la que debe actuar una cierta distribución de tensiones para que la parte aislada permanezca en equilibrio. Su resultante debe ser un par de valor Fd y eje paralelo al de la barra. Lo denominamos **momento torsor** y lo denotamos T . El momento torsor es, por tanto, el *esfuerzo* asociado a la torsión.

¹Es importante apreciar aquí la diferencia en la orientación del par respecto del caso de flexión pura.

²*Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de metal* (1784)



Criterio de signos

El momento torsor se considera positivo cuando sobre la cara frontal de la rebanada corresponde a un vector que apunta en el sentido positivo de avance del eje x . Se adopta la representación indicada en la siguiente figura:

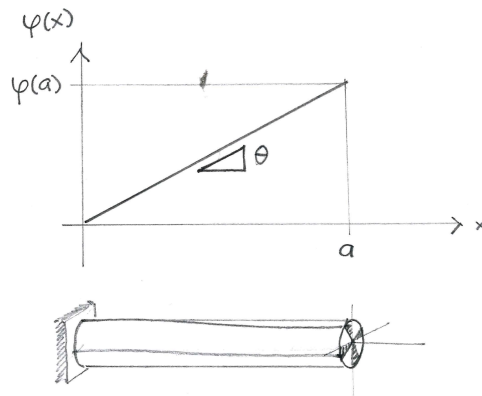


5.3.3. Giro unitario de torsión

Introducimos la variable cinemática $\varphi(x)$, giro de eje x de la sección transversal. Consideremos ahora el giro infinitesimal $d\varphi$ de la cara frontal de una rebanada cualquiera de la viga de espesor dx respecto de su cara dorsal. Dado que la barra es homogénea y que la sollicitación es constante a lo largo de la barra, el giro por unidad de longitud será constante:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta.$$

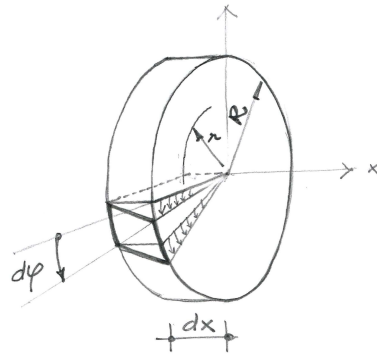
A este parámetro³, constante a lo largo de la barra en torsión pura, se le denomina **giro unitario de torsión**, o también **torsión unitaria o específica**. Sus dimensiones son $[L^{-1}]$.



³No hay que confundir la notación para el giro unitario de torsión θ con la correspondiente al giro de flexión θ .

5.3.4. Tensiones sobre la sección transversal y ecuación constitutiva de la torsión

Supongamos que el radio de la sección circular es R . Observamos ahora la deformación de un elemento de superficie limitado por las caras de la rebanada de espesor dx y por dos radios de la sección que forman un ángulo $d\alpha$.



Cuando la rebanada se deforma como consecuencia de la torsión, la cara frontal de la rebanada experimenta un giro $d\varphi$ respecto a la dorsal. El giro relativo de las caras de la rebanada produce una distorsión γ del elemento de superficie, de modo que se cumple

$$R d\varphi = dx \gamma,$$

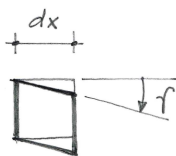
Luego

$$\gamma = R \theta.$$

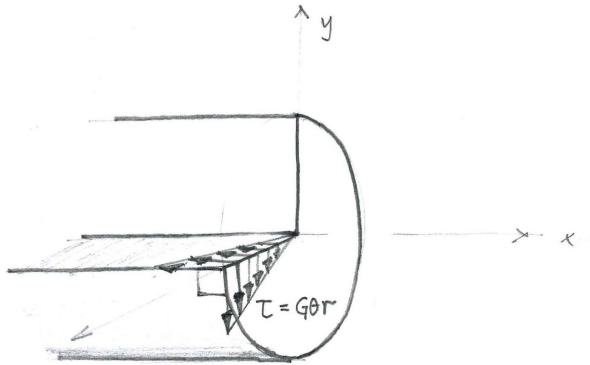
Esta expresión permite calcular la tensión tangencial sobre el elemento de superficie asociada a la torsión pura de la barra:

$$\tau = G R \theta.$$

Este resultado se puede extrapolar en primer lugar a cualquier elemento de superficie sobre



un cilindro interno concéntrico a la superficie exterior de la barra, de modo que $\tau = G r \theta$. Las tensiones calculadas de este modo actúan sobre planos radiales (que contienen al eje de la barra), pero también sobre las caras frontal y dorsal de la rebanada, es decir, sobre el plano de la sección transversal.



Por lo tanto, por efecto de la torsión pura, sobre las secciones transversales de la barra actúa una distribución de tensiones tangenciales en forma de abanico cuya magnitud depende linealmente de la distancia al origen, y cuya orientación es tangente a círculos concéntricos al contorno de la barra.

$$\tau(r) = G\theta r. \quad (5.16)$$

Ecuación constitutiva de la torsión pura

La Definición C de esfuerzo implica la equivalencia estática entre el momento torsor y la distribución de tensiones tangenciales obtenida: el momento torsor debe ser igual al par de eje x que se obtiene sumando el par que producen las fuerzas infinitesimales $\tau(r)dA$ que actúan sobre los diferenciales de superficie de la sección transversal:

$$T = \iint_S r \tau(r) dA.$$

Sustituyendo la tensión tangencial por la expresión obtenida antes y sacando de la integral el módulo de deformación transversal y el giro unitario de torsión, que son constantes, queda

$$T = G \left(\iint_S r^2 dA \right) \theta.$$

La integral es la expresión del momento polar de inercia I_0 de la sección transversal. Sustituyendo se obtiene la **ecuación constitutiva del problema de torsión pura**:

$$T = GI_0 \theta. \quad (5.17)$$

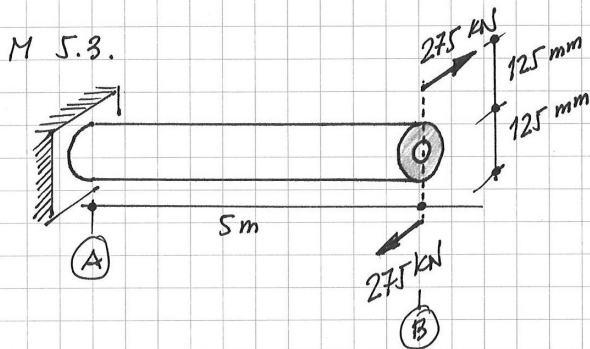
El producto GI_0 es la **rigidez torsional** del modelo viga en cada sección transversal. Esta expresión únicamente es válida para la barra de sección circular (o corona circular) sometida a torsión pura, en la que $I_0 = \frac{\pi R^4}{2}$. En el tema correspondiente a la torsión se estudiará su generalización para otras geometrías de la sección transversal.

Distribución de tensiones en el problema de torsión pura

Despejando el giro unitario de torsión en la ecuación constitutiva (7.5) y sustituyendo el resultado en la expresión de las tensiones tangenciales (5.16) se obtiene:

$$\tau(r) = \frac{T}{I_0} r. \quad (5.18)$$

5. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE VIGAS DE NAVIER-BERNOULLI



La barra mostrada en la figura es de sección circular hueca, de acero.

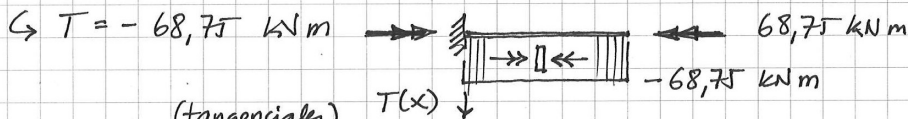
El diámetro exterior es 175 mm

El diámetro interior es 50 mm

La barra es de acero con un módulo de Young $E = 200 \text{ GPa}$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Sobre el extremo B se aplica el par mostrado en la figura.

a) Obtener y representar las tensiones sobre una sección genérica.

Toda la barra está sometida a un momento torsor $T = -275 \cdot 0,25 \text{ kNm}$



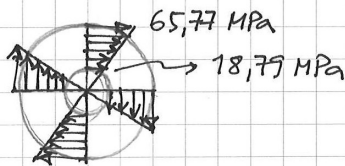
(tangenciales) $T(x)$

Las tensiones τ en la sección se obtienen con (5.18)

$$\tau = \frac{T}{I_0} \cdot r = \frac{-68,75 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{91463604,5 \text{ mm}^4} \cdot r = -0,7517 r \quad (\text{en MPa con } r \text{ en mm})$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{175}{2}\right)^4 - \left(\frac{50}{2}\right)^4 \right) = 91463604,5 \text{ mm}^4$$

Para $r = R_{int} = 25 \text{ mm} \rightarrow \tau = -18,79 \text{ MPa}$
 Para $r = R_{ext} = 87,5 \text{ mm} \rightarrow \tau = -65,77 \text{ MPa}$ } El signo únicamente indica que el sentido de la tensión es horario.



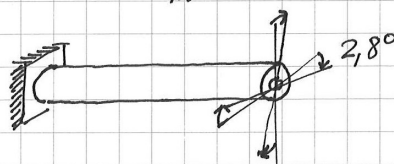
b) Calcular el giro unitario de torsión

$$\theta = \frac{T}{G I_0} \quad (5.17) = \frac{68,75 \cdot 10^6}{76923 \cdot 91463604,5} = 9,7716 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{mm}} = 0,0098 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{2(1,3)} = 76,923 \text{ GPa}$$

c) Obtener el giro de torsión de la sección (B) respecto de la (A)

$$\varphi_B = \theta \cdot L = 0,0098 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \cdot 5 \text{ m} = 0,0489 \text{ rad} = 2,8^\circ$$



5.4. Resumen de las variables de los problemas elementales

En esta sección resumimos los conceptos y variables introducidas en los párrafos precedentes, que componen el modelo que denominamos *modelo viga*, basado en la hipótesis de Navier–Bernoulli para la flexión–extensión y la de Coulomb para la torsión.

5.4.1. Deformaciones del modelo

Constituyen las medidas del cambio de forma (variables cinemáticas) en el modelo viga.

	Notación	Dimensión	Unidades (SI)
Alargamiento unitario de la directriz	ϵ	$[-]$	–
Cambio de curvatura	κ_y, κ_z	$[L^{-1}]$	m^{-1}
Giro unitario de torsión	θ	$[L^{-1}]$	rad/m

Cuadro 5.1: Deformaciones del modelo

5.4.2. Esfuerzos

Son las fuerzas internas o variables estáticas asociadas al modelo viga.

	Notación	Dimensión	Unidades (SI)
Esfuerzo axil	N	$[F]$	kN
Momento flector	M_y, M_z	$[FL]$	kN m
Momento torsor	T	$[FL]$	kN m

Cuadro 5.2: Esfuerzos

5.4.3. Rigideces locales

Son los parámetros del modelo que miden la rigidez de la viga en cada uno de los problemas elementales.

	Notación	Dimensión	Unidades (SI)
Rigidez axil	EA	$[F]$	kN
Rigidez a flexión	EI_y, EI_z	$[FL^2]$	kN m ²
Rigidez torsional	GI_0	$[FL^2]$	kN m ²

Cuadro 5.3: Rigideces locales

Las rigideces locales son parámetros asociados a cada una de las secciones transversales de la viga, no a la viga completa. Más adelante definiremos la rigidez asociada a la pieza completa en cada uno de los problemas considerados.

5.4.4. Ecuaciones constitutivas

Relacionan los esfuerzos con las deformaciones del modelo.

	Esfuerzo	Ecuación	Deformación
Extensión	N	$N = EA \epsilon$	ϵ
Flexión	M	$M = EI \kappa$	κ
Torsión	T	$T = GI_0 \theta$	θ

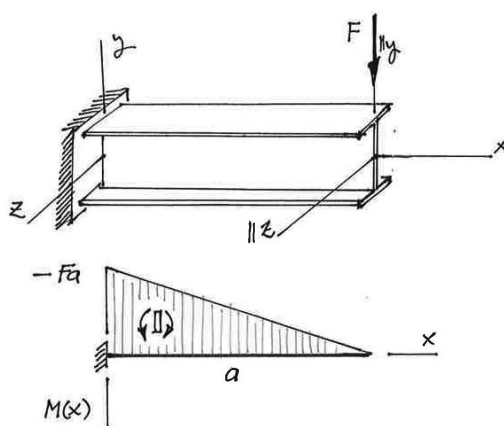
Cuadro 5.4: Ecuaciones constitutivas

Como comentario final llamaremos la atención sobre el hecho de que **el esfuerzo cortante**, a diferencia del esfuerzo axial y del momento flector, **no tiene una definición constitutiva en el modelo de viga de Navier–Bernoulli**. Esto quiere decir que, según este modelo, el cortante no está asociado a ningún modo de deformación de la viga, sino que aparece como consecuencia necesaria al establecer el equilibrio de una parte cualquiera de la estructura (sección 2.2.3).

Tensiones normales producidas por la extensión y la flexión

6.1. Flexión simple y flexión compuesta

En la sección 5.2 se estudió el caso de piezas sometidas únicamente a la acción de un momento flector constante en todas sus secciones, de eje paralelo a uno de los ejes principales de inercia de la sección transversal (**flexión pura**). Esta situación es un caso particular porque en general, como se ha visto en el capítulo 3, un tramo de viga podrá estar solicitado por flectores de magnitud variable (y por tanto también por esfuerzos cortantes). Esta situación, en la que suponemos que no actúan esfuerzos axiales, se denomina **flexión simple recta** (cuando usamos el calificativo recta nos referimos precisamente al hecho de que el eje de flexión es coincidente con uno de los ejes principales de inercia):



6.1.1. Tensiones máximas en flexión simple recta. Módulo resistente

Las tensiones normales en una viga solicitada en flexión simple se pueden obtener, como en el caso de la flexión pura, mediante la expresión (5.15)

$$\sigma(y) = -\frac{M}{I} y$$

Como la distribución de tensiones en la sección es lineal, los valores extremos σ_1 y σ_2 aparecen en las fibras más alejadas del centroide. Denominando d_1 y d_2 a la distancia entre el centroide y la fibra superior e inferior, respectivamente,

$$\sigma_1 = -\frac{M d_1}{I} = -\frac{M}{W_1} \quad (6.1a)$$

$$\sigma_2 = -\frac{M (-d_2)}{I} = \frac{M}{W_2} \quad (6.1b)$$

con

$$W_1 = \frac{I}{d_1} \qquad W_2 = \frac{I}{d_2} \quad (6.2)$$

Los parámetros W_1 y W_2 , cuya dimensión es $[L^3]$, se denominan **módulos resistentes** de la sección transversal y dependen únicamente de sus características geométricas. En el caso de secciones transversales normalizadas de acero su valor está tabulado, lo que facilita el cálculo de tensiones máximas en este tipo de piezas trabajando en flexión simple.

6.1.2. Flexión compuesta recta

Frecuentemente, a la sollicitación de flexión se superpone una sollicitación de tracción o compresión sobre el elemento estructural (por ejemplo en un soporte de una estructura). En este caso la sollicitación se denomina **flexión compuesta**, que será además recta cuando el eje del momento flector coincida con uno de los ejes principales de la sección. Las tensiones normales se obtienen, por tanto, superponiendo (sumando) las debidas a la flexión simple (5.15) y las debidas al esfuerzo axial (tracción o compresión pura)

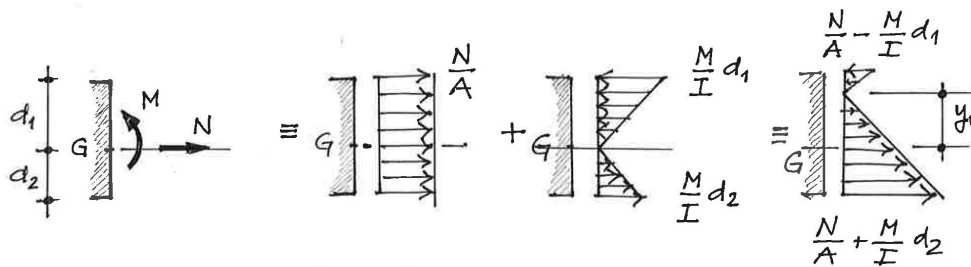
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} y \quad (6.3)$$

Eje neutro (fibra neutra)

Denominamos eje neutro o fibra neutra de la sección transversal de una viga sometida a flexión al lugar geométrico de los puntos de la sección sobre el que las tensiones normales son nulas. En la sección 5.2.4 se demostró que en flexión pura el eje neutro pasa por el centroide de la sección. Esto es así también en el caso de flexión simple. La situación es distinta si sobre la sección actúa un esfuerzo axial. En efecto, si la pieza está sollicitada en flexión compuesta, la ordenada de la fibra neutra se obtiene igualando a cero la expresión anterior y despejando

$$y_0 = \frac{N}{M} \frac{I}{A} \quad (6.4)$$

El signo de y_0 depende del signo del esfuerzo axial y del signo del momento flector (ya que el momento de inercia y el área son siempre positivos).



6.2. Flexión esviada

6.2.1. Fórmula de Navier

Cuando el eje del momento que actúa sobre la sección no coincide con alguno de los ejes principales de inercia de ésta se dice que la **flexión** es **esviada**. En ese caso el momento flector puede descomponerse según los ejes principales de inercia y , z de la sección transversal. Diremos que la sección está solicitada por los momentos flectores M_y y M_z . Para deducir la fórmula general que proporciona las tensiones superpondremos el efecto de cada una de las sollicitaciones por separado:

- El efecto del momento M_z viene dado directamente por la fórmula (5.15), en la que hemos asignado el subíndices apropiados al momento de inercia: teniendo en cuenta que el plano de la estructura es el $\{x, y\}$ y que los momentos flectores son de eje z , el momento de inercia de la sección relevante en este caso es I_z (ya que las secciones giran alrededor de ejes paralelos al eje z):

$$-\frac{M_z}{I_z} y$$

Es fácil comprobar **usando la regla de la mano derecha** que **las tensiones normales producidas por un flector positivo de eje z son compresiones en la parte de la sección en la que la coordenada y es positiva**: por esta razón este término es negativo.

- El efecto del momento M_y debe ser similar en cuanto a la estructura de la fórmula: el momento de inercia de la sección será el correspondiente al eje del momento flector, pero habrá que analizar cuál es el signo apropiado: es inmediato comprobar **mediante la regla de la mano derecha** que **un flector positivo de eje y produce tracciones en la parte de la sección en la que la coordenada z es positiva**, por tanto el signo de la expresión es positivo

$$\frac{M_y}{I_y} z$$

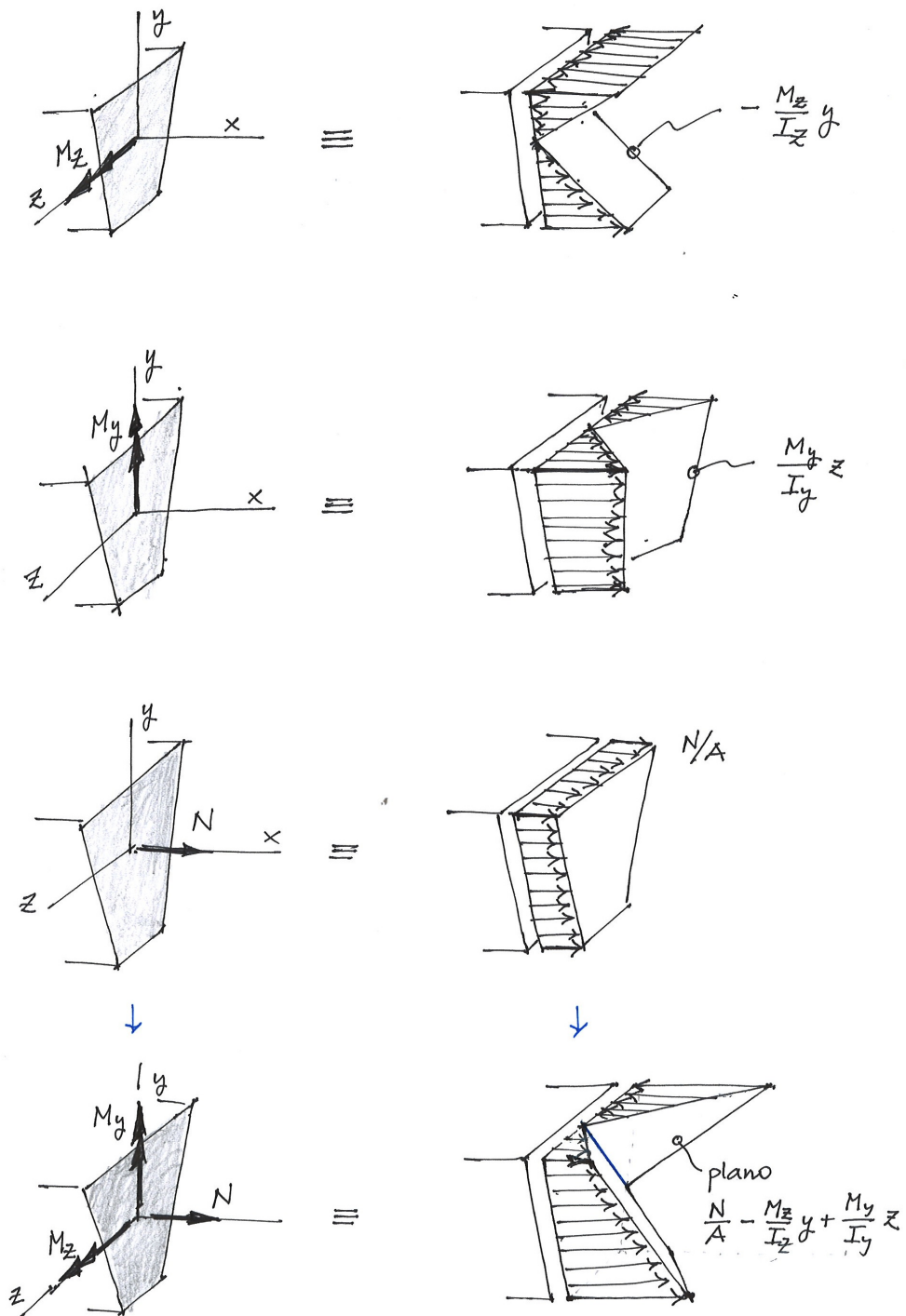
- Por último, ya se ha visto que el esfuerzo axial introduce una distribución uniforme de tensiones de valor

$$\frac{N}{A}$$

Entonces, superponiendo los tres efectos llegamos a la siguiente expresión para las tensiones normales en el caso general de flexión:

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (6.5)$$

Esta es la denominada **fórmula de Navier**. Es necesario indicar que es sólo es válida si los ejes y , z son ejes principales de inercia de la sección y el eje x es central, es decir, pasa por el centroide de la sección transversal.



La fórmula de Navier es la expresión del plano ideal formado por los extremos de los vectores tensión que actúan sobre la sección. La representación habitual de las tensiones se lleva a cabo a un solo lado de la sección, de modo que el plano mencionado aparece quebrado. En el siguiente apartado veremos que la recta sobre la que se produce este quebro es precisamente el eje neutro.

6.2.2. Ecuación del eje neutro

Ya hemos visto que el eje neutro o fibra neutra es el lugar geométrico de los puntos de la sección sobre los que la tensión normal debida a la flexión es nula. Por lo tanto, la ecuación del eje neutro se obtiene imponiendo que la tensión normal sea nula en la fórmula de Navier (6.5):

$$0 = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (6.6)$$

Se trata de la **ecuación de una recta** contenida en el plano de la sección transversal. Podemos escribirla empleando y como variable independiente (siempre y cuando $M_y \neq 0$)

$$z = \frac{I_y}{I_z} \frac{M_z}{M_y} y - \frac{I_y}{A} \frac{N}{M_y}, \quad (6.7)$$

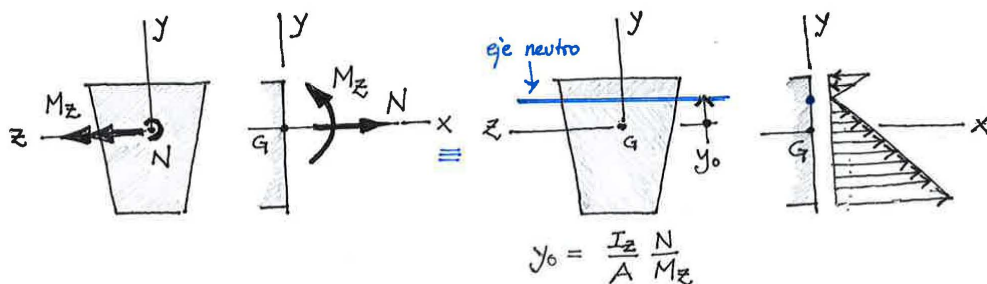
o bien usando z como variable independiente (siempre que $M_z \neq 0$):

$$y = \frac{I_z}{I_y} \frac{M_y}{M_z} z + \frac{I_z}{A} \frac{N}{M_z} \quad (6.8)$$

Representación del eje neutro

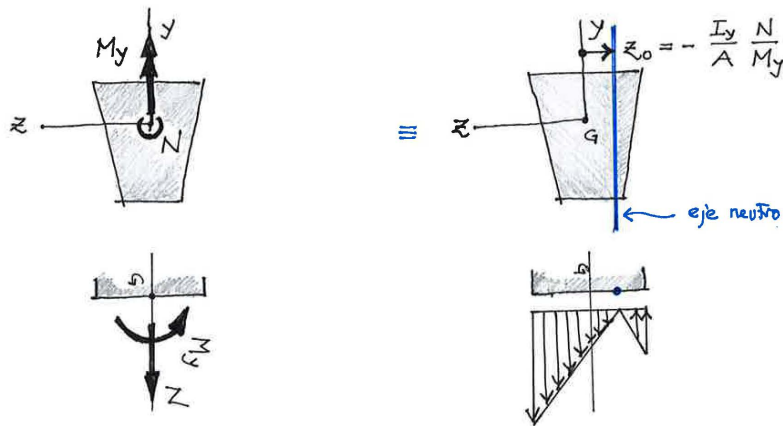
Si $M_y = 0$ (flexión compuesta recta de eje z), la fibra neutra es una recta horizontal de ecuación

$$y = \frac{I_z}{A} \frac{N}{M_z} \quad (6.9)$$



Si $M_z = 0$ (flexión compuesta recta de eje y), la fibra neutra es una recta vertical de ecuación

$$z = -\frac{I_y}{A} \frac{N}{M_y} \quad (6.10)$$

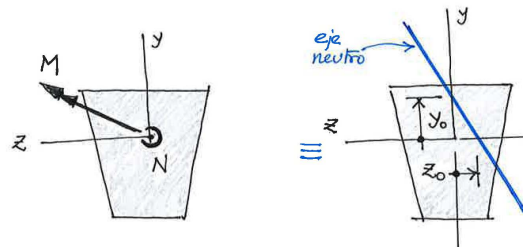


En el caso de flexión simple esviada ($N = 0$), el término independiente será nulo y la fibra neutra será una recta que pasa por el centroide, de ecuación

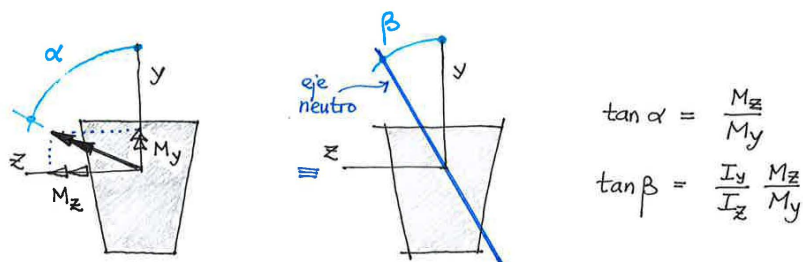
$$z = \frac{I_y}{I_z} \frac{M_z}{M_y} y \quad (6.11)$$

En el caso general (flexión compuesta esviada) la forma más sencilla de dibujar la fibra neutra es representando los cortes con los ejes y, z , que se deducen de la ecuación general:

$$y_0 = \frac{I_z}{A} \frac{N}{M_z} \quad z_0 = -\frac{I_y}{A} \frac{N}{M_y}$$

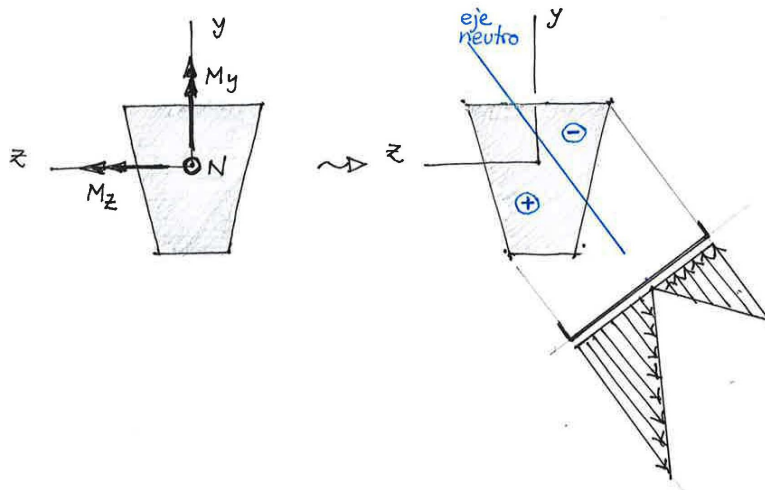


La pendiente de la fibra neutra sólo coincidirá con la del vector momento flector $\mathbf{M} = M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$ cuando los momentos principales de inercia de la sección sean iguales.



Representación de las tensiones sobre la sección

Para representar las tensiones normales producidas por la flexión en el caso más general (flexión compuesta esviada) dibujaremos en primer lugar el eje neutro según lo explicado antes. Las tensiones se representan sobre el plano de la sección abatido perpendicularmente al eje neutro como muestra la figura



Los valores extremos de la tensión normal se alcanzan sobre los puntos de la sección transversal más alejados del eje neutro. Se obtendrán sustituyendo en la Fórmula de Navier (6.5) las coordenadas de los puntos de la sección mencionados. Además, a efectos prácticos, la parte de la sección comprimida y la traccionada se pueden identificar usando la regla de la mano derecha alrededor del vector que representa el momento flector: las puntas de los dedos representarían la compresión y la base de la mano la tracción.

6.3. Clasificación de las solicitaciones de flexión

Resumimos a continuación los terminos empleados para referirnos a las distintas clases de solicitaciones de flexión:

1. **Flexión pura.** Es el caso estudiado como problema elemental de la teoría de vigas. M es constante en el tramo considerado y actúa según uno de los ejes principales de inercia de la sección (además $N = 0$).
2. **Flexión simple.** La flexión es simple cuando $N = 0$. En general M no será constante en el tramo considerado y podrá tener componentes según uno o ambos ejes y, z .
3. **Flexión compuesta.** Es el caso contrario al anterior: $N \neq 0$.
4. **Flexión recta.** Se dice que la flexión es recta cuando el momento flector actúa según uno de los ejes principales. Entonces $M_y = 0$, o bien $M_z = 0$.
5. **Flexión esviada.** Es el caso contrario al anterior: $M_y \neq 0$ y $M_z \neq 0$.

6.4. Efecto de un axil excéntrico. Concepto de núcleo central

Consideremos una sección sometida a la actuación de una fuerza axil que no pasa por el centroide. Para simplificar el análisis supongamos que el axil actúa sobre el eje y con una excentricidad e (asignamos a la excentricidad el mismo criterio de signos que a la coordenada y). La fuerza se reduce a un axil $N = F$ y un momento $M_z = -F e$ y producirá la distribución de tensiones normales

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{F e}{I_z} y \quad (6.12)$$

El eje neutro será una recta paralela al eje z a una distancia

$$y = -\frac{I_z}{A e} \quad (6.13)$$

del centroide. Para valores pequeños de la excentricidad el eje neutro estará muy alejado de la sección y toda la sección quedará traccionada, como se muestra en la figura

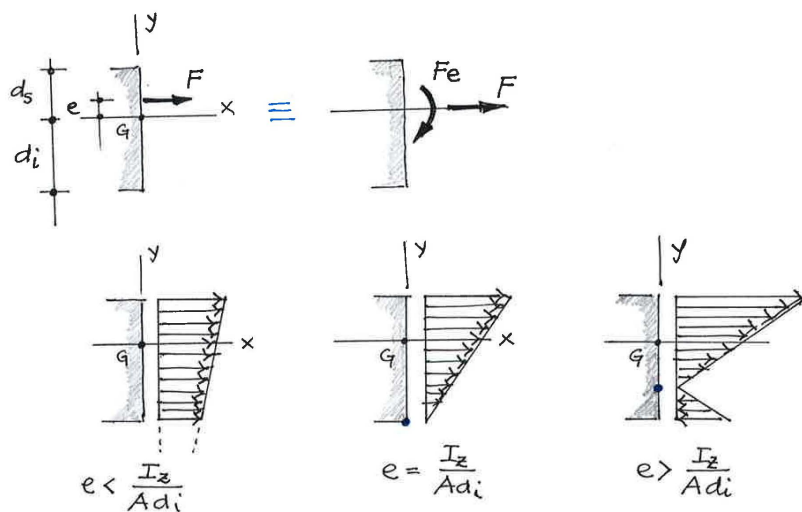
A medida que la excentricidad de F aumenta el eje neutro se irá acercando a la sección, hasta que para un cierto valor de la excentricidad el eje neutro será tangente a la fibra inferior de la sección, y la tensión se anulará en el (o los) punto(s) de tangencia. El valor correspondiente de la excentricidad será (suponiendo que la distancia del centroide a la fibra inferior es d_i):

$$e = \frac{I_z}{A d_i} \quad (6.14)$$

Si la excentricidad aumenta la fibra neutra entrará en la sección y parte de la misma quedará comprimida.

Para valores negativos de la excentricidad, el eje neutro se encontrará por encima del centroide; será tangente a la sección (suponiendo que la distancia del centroide a la fibra inferior es d_s) cuando

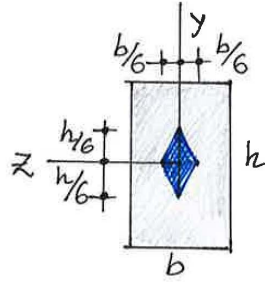
$$e = -\frac{I_z}{A d_s} \quad (6.15)$$



6. TENSIONES NORMALES PRODUCIDAS POR LA EXTENSIÓN Y LA FLEXIÓN

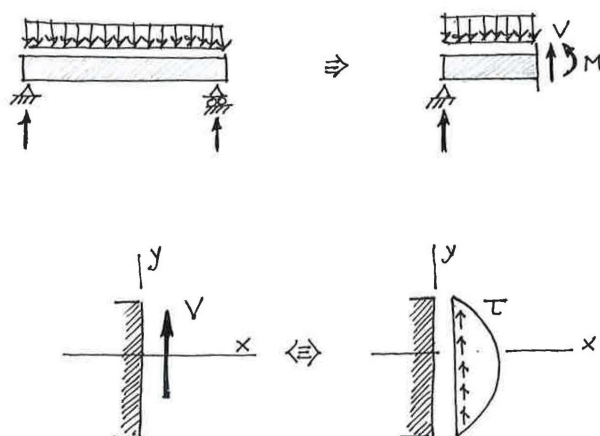
Por lo tanto, podemos afirmar que **siempre que la fuerza axial actúe dentro del intervalo de excentricidades que hemos obtenido toda la sección quedará traccionada** (o comprimida, si la fuerza F fuera de compresión). La región de la sección definida por este intervalo se denomina **núcleo central**.

Se puede demostrar que para una sección rectangular (de canto h y ancho b), el núcleo central es un rombo centrado en el centroide cuyos semiejes miden, respectivamente, $h/6$ y $b/6$.



Tensiones tangenciales debidas a solicitaciones de corte y torsión

En el capítulo 8.1 se introdujeron los problemas elementales de la teoría de vigas: extensión, flexión y torsión. Se demostró que la extensión y la flexión causan tensiones normales, y *la torsión produce tensiones tangenciales sobre las secciones transversales*. Sin embargo, en ninguno de los problemas elementales aparece el esfuerzo cortante. Ello es debido a que la teoría de vigas que adoptamos (Teoría de Navier–Bernoulli para la flexión y extensión y Teoría de Coulomb para la torsión) no considera que el cortante produzca deformación de las rebanadas de la viga¹. Sin embargo, el esfuerzo cortante aparece necesariamente cuando planteamos el equilibrio de una parte de la viga; si recordamos la Definición C de esfuerzo como resultante de las tensiones sobre la sección, es evidente llegar a la conclusión de que **el equilibrio de una parte de la viga requiere que, sobre la sección de corte, aparezcan tensiones (necesariamente tangenciales) cuya resultante sea el esfuerzo cortante**.



Por lo tanto, las tensiones tangenciales que actúan sobre la sección transversal de una viga tienen dos posibles orígenes:

¹La Teoría de Timoshenko, que no se estudia en este curso, sí tiene en cuenta la deformación debida al esfuerzo cortante.

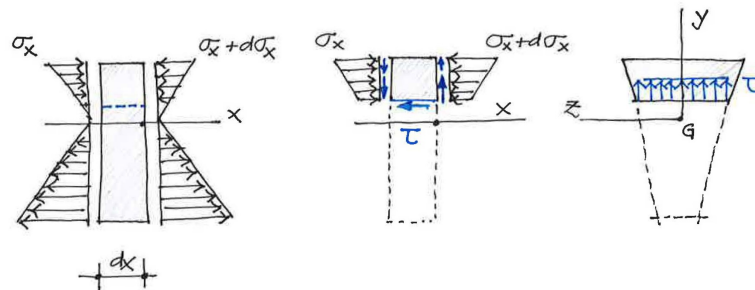
1. Las **solicitaciones de corte**, es decir, esfuerzos cortantes que solicitan la sección, y
2. Las **solicitaciones de torsión**, o momentos torsores que solicitan la sección.

7.1. Tensiones tangenciales debidas a solicitaciones de corte

En esta sección analizamos las tensiones tangenciales que aparecen sobre la sección transversal como consecuencia de la actuación de un esfuerzo cortante. Centraremos el análisis en secciones macizas. Para secciones de pared delgada, es necesario adaptar la teoría que presentamos con el fin de tener en cuenta sus particularidades. Este tipo de secciones, así como el concepto de Centro de Esfuerzos Cortantes, será tratado en la asignatura “Estructuras Metálicas”.

7.1.1. Tensiones tangenciales en vigas de sección maciza. Fórmula de Zhuravski–Colignon

Consideramos una viga en flexión simple recta de eje z . Suponemos, para facilitar la deducción, que no actúan esfuerzos axiales. La ley de momentos flectores es $M_z(x)$, y su derivada proporciona la ley de esfuerzos cortantes: $dM_z/dx = -V_y(x)$. Aislamos una rebanada y planteamos ahora el equilibrio de una parte de la rebanada, cortándola por un plano perpendicular al eje y a una distancia y del centroide.



Si dibujamos las acciones en la dirección x sobre esa parte de la rebanada, tendremos sobre la cara dorsal un bloque de tensiones normales σ_x , sobre la cara frontal el bloque correspondiente y su incremento diferencial $\sigma_x + d\sigma_x$. Sobre la cara de corte perpendicular al eje y deberá actuar un bloque de tensiones tangenciales τ en el sentido indicado, para garantizar el equilibrio de fuerzas horizontales. Supondremos que este bloque es uniforme (la tensión tangencial es constante) en el ancho de la sección². Si observamos la sección transversal de la rebanada de frente, denominaremos $A(y)$ a la parte de la sección correspondiente al trozo de rebanada que aislamos. Sobre la arista de corte representamos el bloque uniforme de tensiones tangenciales correspondiente a las tensiones que actúan sobre el plano inferior de corte. La ecuación de

²Aunque en realidad no lo es, la Teoría de Vigas no dispone de herramientas para determinar su distribución, siendo necesario recurrir a la Teoría de la Elasticidad para hacerlo. A efectos prácticos, los resultados obtenidos suponiendo que el bloque es uniforme en el ancho de la sección son suficientemente precisos siempre y cuando la forma de la sección sea regular y además alargada en la dirección del cortante.

equilibrio de fuerzas horizontales es:

$$-\int_{A(y)} \sigma_x dA - \tau(y) b(y) dx + \int_{A(y)} (\sigma_x + d\sigma_x) dA = 0$$

Por otra parte, empleando la fórmula de Navier para flexión recta,

$$d\sigma_x = d\left(-\frac{M_z}{I_z} y\right) = -\frac{y}{I_z} \frac{dM_z}{dx} dx = \frac{y}{I_z} V_y dx$$

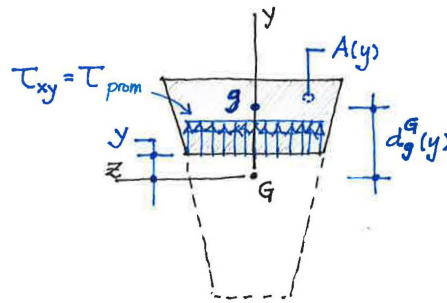
Sustituyendo la expresión anterior, cancelando la integral de σ_x así como dx , resulta

$$\tau(y) b(y) = \frac{V_y}{I_z} \int_{A(y)} y dA$$

En esta expresión podemos identificar la integral como el momento estático de $A(y)$ respecto del eje z que pasa por el centroide de la sección, que denominaremos $S_z(A(y))$. Por tanto, en una sección sometida a un cortante V_y , el valor de la tensión tangencial que actúa sobre una línea situada a una distancia y del centroide es:

$$\tau(y) = V_y \frac{S_z(A(y))}{I_z b(y)} \quad (7.1)$$

Ésta es la **fórmula de Zhuravsky–Colignon**.



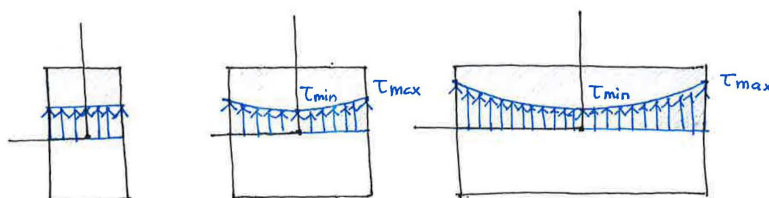
A efectos prácticos, el momento estático se puede calcular como el producto (o la suma de productos) del área $A(y)$ por la distancia (con signo) de su propio centroide al centroide de la sección $d_g^G(y)$:

$$S_z(A(y)) = A(y) d_g^G(y) \quad (7.2)$$

Conviene observar que cuando la línea de corte coincide con las aristas extremas de la sección, entonces el momento estático es nulo (bien porque la sección es nula: $A(d_{sup}) = 0$ cuando $y = d_{sup}$, o bien porque la distancia de centroide a centroide es nula: $d_g^G(-d_{inf}) = 0$ cuando $y = -d_{inf}$). Por tanto, en las aristas extremas de la sección, las tensiones tangenciales producidas por un cortante son nulas.

Limitaciones de la fórmula de Zhuravsky

La aplicabilidad directa de la fórmula de Zhuravsky está limitada a secciones con forma regular cuya anchura sea apreciablemente menor que su canto (entendiendo el canto como la dimensión de la sección en la dirección del cortante). Esto es necesario para que la hipótesis de distribución uniforme de las tensiones tangenciales en el ancho de la sección sea suficientemente cercana a la realidad. La fórmula proporciona tensiones tangenciales sobre la sección que llevan la dirección del eje y , se trata pues de τ_{xy} a lo largo de cada línea paralela al eje z situada a una distancia y del centroide. Cuando la sección no cumple las condiciones geométricas mencionadas, las tensiones tangenciales pueden sufrir grandes cambios a lo largo de la línea de corte, como se muestra en la tabla anexa. En ella se comparan, para una sección rectangular, los valores máximo y mínimo de la tensión tangencial obtenidos mediante la Teoría de la Elasticidad con el valor promedio que resulta de la fórmula de Zhuravsky, para distintos valores de la relación anchura/canto.

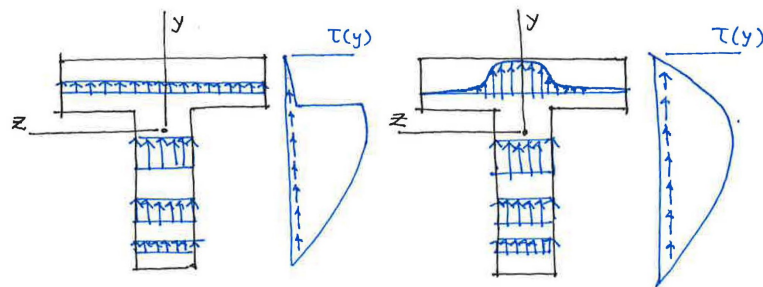


b/h	0.25	0.5	1	2	4	6	10	20	50
$\tau_{\max}/\tau_{\text{prom}}$	1.008	1.033	1.126	1.396	1.988	2.582	3.770	6.740	15.65
$\tau_{\min}/\tau_{\text{prom}}$	0.996	0.983	0.940	0.856	0.805	0.800	0.800	0.800	0.800

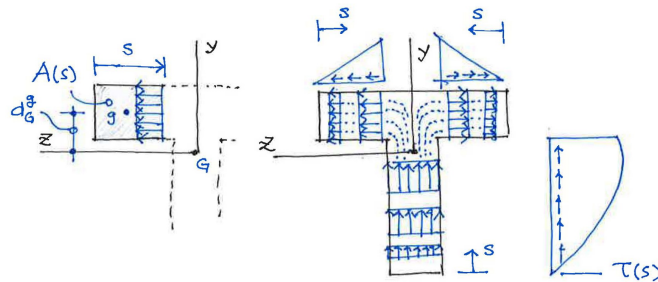
Se observa cómo a partir de relaciones ancho/canto superiores a 1 los errores en la estimación de las tensiones superan el 10%. Además, como veremos en la siguiente sección, en secciones cuya anchura sea superior a su canto, las tensiones tangenciales sobre la sección debidas a un cortante V_y no tienen por qué estar orientadas en la dirección y .

7.1.2. Extensión de la fórmula de Zhuravsky a vigas con sección en T y doble T

Consideremos una sección transversal en forma de T. La fórmula de Zhuravsky es válida en el alma de la sección, cuyo ancho es menor que su dimensión vertical. Sin embargo, en el ala, la distribución de tensiones que proporciona la fórmula se aleja de la distribución real, que tiene forma de campana con valores mayores en la zona central.



Consideremos ahora la posibilidad de aislar una parte del ala de la T. En este caso el plano de corte no es perpendicular al eje y sino al contorno superior del ala de la sección. La tensión tangencial actúa ahora sobre el plano de corte, que es vertical. Por lo tanto, las tensiones tangenciales que actúan sobre la sección en el borde del plano de corte son, en este caso, componentes τ_{xz} (actúan sobre el plano perpendicular al eje x en la dirección horizontal z).

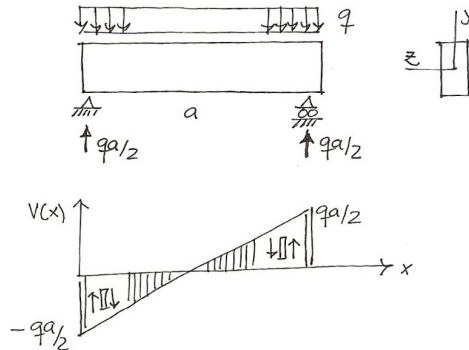


Todo lo razonado en la deducción de la fórmula de Zhuravsky es válido, salvo por el hecho de que las tensiones y los momentos estáticos ya no están asociadas a la variable y sino a una nueva variable s cuyo origen podemos escoger arbitrariamente en el borde del ala de la T, que toma valores a lo largo del alma de la sección. Entonces la fórmula resulta

$$\tau(s) = V_y \frac{S_z(A(s))}{I_z b(s)} \quad (7.3)$$

El momento estático se puede calcular como producto del área por la distancia de su centroide al eje z : $S_z(A(s)) = A(s) d_g^G$. En el denominador, $b(s)$ es el espesor del ala (medido perpendicularmente a la variable s). Empleando esta expresión se puede estimar de forma más precisa el flujo de tensiones tangenciales en el ala de la sección en T. Únicamente en la región en la que convergen ala y alma, la teoría no proporciona el modo de obtener la distribución de tensiones.

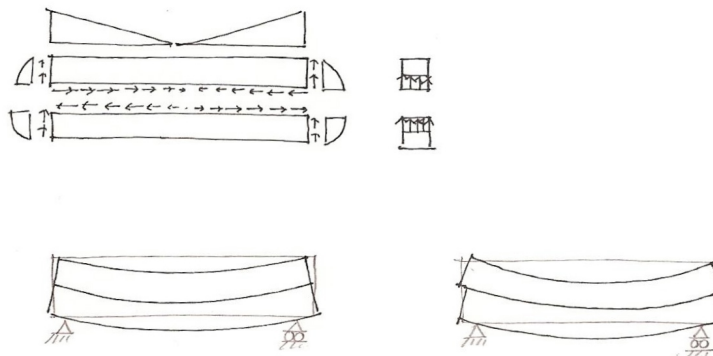
7.1.3. Flujo de tensiones tangenciales (rasante)



El producto de la tensión tangencial (promedio) sobre el borde del plano de corte y la anchura de la línea de corte $\tau b(s)$ representa la fuerza por unidad de longitud que la parte de la viga que queda a un lado del plano de corte ejerce sobre la parte de la viga correspondiente a la parte de la sección que hemos aislado, en la sección transversal considerada. Se denomina **rasante** y su valor es

$$\tau b(s) = V_y \frac{S_z(A(s))}{I_z} \tag{7.4}$$

Podemos imaginar que separamos la viga por un plano paralelo al eje x en dos partes. El rasante es la fuerza por unidad de longitud que una parte de la viga ejerce sobre la otra a lo largo del plano de corte. Es la fuerza necesaria para que las dos partes de la viga actúen de forma solidaria.



Consideremos por ejemplo una viga formada por tablas de madera colocadas una encima de otra. Si las tablas no estuvieran unidas, deslizarían unas sobre otras, y el comportamiento del conjunto no sería el de una única viga, sino el de un grupo de vigas apoyadas unas sobre otras, mucho menos efectivo. Para que el conjunto funcione como viga, es necesario unir las tablas mediante un adhesivo, o mediante clavos. El medio de unión transmitirá el rasante entre tabla y tabla.

7.2. Tensiones tangenciales producidas por solicitaciones de torsión

7.2.1. Clasificación de las solicitaciones de torsión

En el tema 8.1 se analizó el problema elemental de torsión en el caso de una barra de sección con *forma circular o corona circular*. La teoría correspondiente se denomina **Torsión de Coulomb**, y es un caso particular de la teoría que describe el comportamiento de barras con cualquier tipo de sección sometidas a torsión pura, que se denomina **Torsión de Saint-Venant**.

El fenómeno de torsión es más complejo que el de extensión o el de flexión, debido a que, en general, las secciones transversales de una pieza torsionada pierden su planeidad. Este comportamiento se denomina **alabeo** y consiste en el desplazamiento paralelo al eje x de los puntos de las secciones transversales. Este desplazamiento es diferente en cada punto de la sección, y transforma la sección transversal inicialmente plana en una superficie alabeada.



Denominamos **Torsión Pura (o Uniforme)** al problema de una barra recta sometida a la acción pares torsores en equilibrio en sus extremos aplicados *de modo que en las secciones extremas no hay coacción al alabeo*. La teoría que describe la respuesta de piezas en torsión pura se denomina **Torsión de Saint Venant**. Se basa en dos hipótesis cinemáticas: el giro unitario de torsión θ es constante a lo largo de la pieza, y el alabeo de las secciones es el mismo a lo largo de la pieza. Con estas hipótesis se demuestra que la ecuación constitutiva es

$$T = GJ\theta \quad (7.5)$$

Esta expresión es casi idéntica a la aplicable en el caso de la Torsión de Coulomb, salvo por la aparición del **módulo de torsión** J en lugar del momento polar de inercia de la sección I_0 (coinciden en el caso de sección circular maciza y en el caso de sección en corona circular).

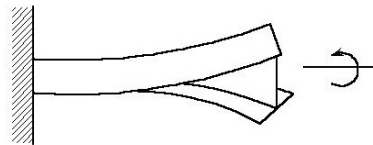
Cuando no se cumple alguna de las hipótesis correspondientes a la torsión pura estamos en el caso de **Torsión no Uniforme**. Esta situación puede aparecer, bien porque las acciones exteriores producen *momentos torsores no constantes a lo largo de la pieza*, o bien porque *las condiciones de sustentación impiden de algún modo el alabeo libre de las secciones extremas*. En torsión no uniforme la respuesta de la pieza estará comprendida entre los dos casos extremos:

1. **Torsión de Saint-Venant pura**. La pieza en torsión no uniforme se seguirá rigiendo por esta teoría cuando se dan las condiciones para que el alabeo sea muy pequeño. Esto sucede en piezas de cierta longitud, con los siguientes tipos de sección:

- a) Sección maciza (puede tener huecos, o no)
- b) Sección hueca cerrada de pared delgada (unicelular o multicelular)
- c) Sección abierta de pared delgada en la que las líneas medias de todas las paredes convergen en un único punto.

El parámetro mecánico dominante en la torsión de Saint–Venant es la **rigidez torsional** GJ .

2. **Torsión alabeada pura.** La torsión alabeada aparece en piezas cortas con sección transversal abierta de pared delgada sometidas a torsión no uniforme (el alabeo puede llegar a ser grande en este tipo de secciones). En este caso la intensidad de alabeo es variable a lo largo de la pieza, lo que provoca (adicionalmente a las tensiones tangenciales propias de la torsión) la **aparición de tensiones normales** necesarias para la coacción del alabeo **cuya magnitud no es despreciable**. El parámetro mecánico dominante es la **rigidez al alabeo** EI_ω , producto del módulo de elasticidad E por el módulo de alabeo I_ω .



En casos intermedios el fenómeno se denomina **torsión mixta** y su formulación es más compleja. El desarrollo de las teorías expuestas, así como el procedimiento para la obtención de los módulos de torsión y de alabeo para distintas clases de secciones quedan fuera del alcance de esta asignatura. No obstante, a efectos prácticos, en piezas sometidas a torsión no uniforme, la ecuación (7.5) sigue siendo válida aún cuando el momento torsor no sea constante:

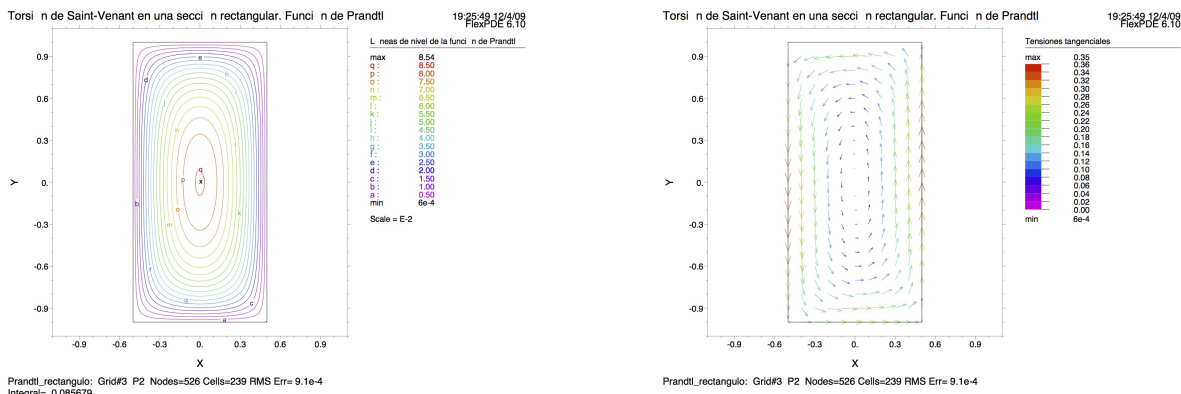
$$T(x) = GJ\theta(x) \quad (7.6)$$

Teniendo en cuenta que $\theta = d\phi/dx$, la integración de esta ecuación permitirá calcular giros de torsión en piezas sometidas a torsión no uniforme. En la siguiente sección se incluyen los valores del módulo de torsión y de las tensiones tangenciales máximas debidas a la torsión para distintos tipos de sección.

7.2.2. Analogía de la membrana

Ludwig Prandtl demostró en 1903 que la distribución de tensiones tangenciales debidas a la torsión guarda una analogía con la forma de una membrana isótropa tensada sobre un contorno igual al de la sección y sometida a una presión uniforme. Las líneas de nivel de la superficie en la que se transforma la membrana son análogas a las curvas que forman las tangentes a las tensiones tangenciales sobre la sección, y la pendiente de la membrana en cada punto es análoga a la magnitud de la tensión tangencial en el punto correspondiente de la sección. La analogía de la membrana permitió obtener soluciones al problema de torsión de Saint–Venant en secciones con geometrías complicadas empleando modelos físicos, y más recientemente mediante la solución numérica de las ecuaciones correspondiente. (la formulación de estas ecuaciones no es objeto de este curso). La analogía es muy útil para representar a estima el flujo de tensiones tangenciales sobre secciones con forma arbitraria.

7.2. Tensiones tangenciales producidas por solicitaciones de torsión



7.2.3. Módulo de torsión y tensiones tangenciales en distintos tipos de sección

Sección circular o corona circular

Este caso corresponde a la denominada *Torsión de Coulomb* y es un caso particular de la de Saint-Venant en el que el alabeo es nulo.

$$J = I_0 \qquad \tau = \frac{T}{I_0} r \qquad (7.7a)$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \pi R^4 \qquad (7.7b)$$

Elipse

a es la longitud del eje mayor y b la del menor. La tensión máxima se alcanza en los extremos del eje menor.

$$J = \frac{A^4}{4\pi^2 I_0} \qquad \tau_{max} = 16 \frac{T}{\pi ab^2} \qquad (7.8a)$$

$$I_0 = \frac{1}{64} \pi ab (a^2 + b^2) \qquad (7.8b)$$

Triángulo equilátero

b es el lado, h es la altura. La tensión máxima se alcanza en el centro de los lados.

$$J = 0,6 I_0 = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}b^4}{80} \qquad \tau_{max} = 20 \frac{T}{b^3} \qquad (7.9)$$

Rectángulo

b es el lado menor, h el lado mayor, $\beta = b/h$. La tensión máxima se alcanza en el centro de los lados mayores.

$$J = \alpha hb^3 \qquad \tau_{max} = \frac{T}{\mu} \qquad (7.10a)$$

$$\alpha = 0,33 - 0,22\beta + 0,03\beta^2 \qquad \mu = (0,33 - 0,22\beta + 0,10\beta^2)hb^2 \qquad (7.10b)$$

Si el rectángulo es muy alargado

$$J \simeq \frac{1}{3} hb^3 \qquad \tau_{max} \simeq \frac{T}{J} b \qquad (7.11)$$

Sección hueca de pared delgada (unicelular)

El producto τe es constante a lo largo de la línea media. Es el flujo de tensiones tangenciales o **rasante**. El módulo de torsión y la tensión tangencial sobre un corte perpendicular a la línea media de la sección valen:

$$J = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{e}} \qquad \tau = \frac{T}{2A_0 e}. \qquad (7.12a)$$

Sección con forma irregular

Saint-Venant propuso emplear el valor del módulo de torsión de la elipse inscrita substituyendo en la fórmula el área y el momento polar de la sección en cuestión. Otros autores señalan un ajuste más preciso con la fórmula

$$J \simeq \frac{A^4}{40I_0}. \qquad (7.13)$$

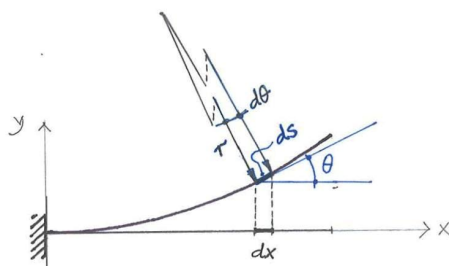
Estas expresiones sólo son aplicables a secciones cuyas dimensiones mayor y menor sean comparables.

La deformada de la estructura

8.1. Ecuación diferencial de la elástica

Al tratar el problema elemental de flexión de una barra en el capítulo se dedujeron las relaciones geométricas que se observan en la pieza deformada a flexión. En primer lugar la relación entre el diferencial de longitud de la directriz deformada y su radio de curvatura:

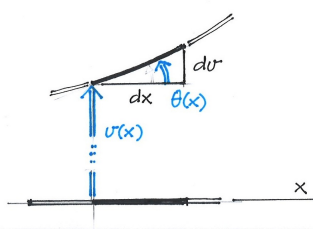
$$ds = r d\theta$$



Y también la descomposición del diferencial de longitud en la dirección horizontal y vertical, así como la aproximación del mismo por dx fundada en la hipótesis de pequeños desplazamientos (y por tanto pequeños giros):

$$dx = ds \cos \theta \simeq ds \quad (8.1a)$$

$$dv = ds \sin \theta \simeq \theta dx \quad (8.1b)$$



Sustituyendo,

$$\kappa = \frac{1}{r} \simeq \frac{d\theta}{dx} \simeq \frac{d^2v}{dx^2}, \quad (8.2)$$

se obtiene la expresión de la curvatura de la directriz sometida a flexión como segunda derivada del desplazamiento de los puntos de la directriz en dirección perpendicular a la misma.

Recordamos también que la ecuación constitutiva de la flexión (5.14) relaciona el momento flector con la curvatura de la directriz:

$$M = EI\kappa$$

Por lo tanto, resulta:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.3)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria permite obtener la función $v(x)$, es decir, la deformada de la viga o elástica, integrando dos veces la relación entre la ley de momentos flectores y la rigidez a flexión de la sección.

La ecuación tiene el inconveniente de que no permite obtener la deformada en aquellos problemas en los que no sea posible determinar de antemano la ley de momentos flectores en la pieza. Este inconveniente se puede eludir recurriendo a las ecuaciones de equilibrio de la viga (3.1). Admitiendo que $m_z(x) = 0$,

$$Q(x) = -\frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right),$$

y

$$q_y(x) = -\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right).$$

Si la viga es de sección constante, EI sale de las derivadas y se obtiene la denominada **ecuación diferencial de la elástica**:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q_y(x)}{EI} \quad (8.4)$$

La elástica es la curva $y = v(x)$, solución de la ecuación anterior, y representa la directriz deformada; también se la denomina simplemente **deformada**. Para obtener $v(x)$ es necesario integrar (8.4) sucesivamente. Sólo es necesario conocer la función $q_y(x)$. El resultado queda en función de cuatro constantes de integración (una por integración) que se determinan a partir de las condiciones de contorno. Las leyes de esfuerzos del problema de flexión se obtienen directamente a partir de los resultados intermedios del cálculo descrito:

$$Q(x) = -EI \frac{d^3v}{dx^3} \quad (8.5a)$$

$$M(x) = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (8.5b)$$

Por otra parte, como se observa en la ecuación (8.1b), el giro de la sección en cada punto de la directriz es la primera derivada del desplazamiento vertical:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} \quad (8.6)$$

La integración de la ecuación de la elástica es un procedimiento muy potente para la determinación de la deformada:

- Permite obtener la ecuación matemática de la deformada, así como de la función que describe los giros de las secciones a lo largo de la directriz, y por tanto sus valores en cualquier sección de la pieza.
- Los resultados intermedios del cálculo proporcionan la ley de esfuerzos cortantes y la ley de momentos flectores.
- El método también es aplicable a estructuras hiperestáticas, y proporciona la solución completa del problema (desplazamientos, giros y esfuerzos).

Sin embargo, cuando la viga está sometida a cargas puntuales, o cuando la estructura está formada por varias barras, la integración de la ecuación diferencial es poco operativa y muy laboriosa. En los siguientes apartados estudiaremos otros procedimientos muchos más operativos para obtener desplazamientos y giros en vigas.

8.2. Fórmulas de Navier–Bresse

Si en lugar de buscar las expresiones completas de los desplazamientos y giros en una viga nos basta con obtener valores de los mismos en determinadas secciones de interés, entonces podemos eludir la integración de la ecuación diferencial de la elástica. Para ello necesitaremos conocer los diagramas de esfuerzos a lo largo de la pieza. Las expresiones que permiten llevar a cabo estos cálculos se denominan fórmulas de Navier–Bresse.

No debemos olvidar que la finalidad de los procedimientos que presentamos es llegar a conocer cómo se deforma la estructura. Generalmente suele bastar el cálculo de movimientos en algunas secciones de la estructura para poder representar a estima la deformada de la estructura. En la última sección de este capítulo retornaremos a la representación de la deformada.

Consideramos un tramo AB de una viga sometida a cargas en su plano, cuya directriz suponemos alineada con el eje x . Suponiendo que los desplazamientos y el giro de la sección A son conocidos (u_A, v_A, θ_A) , queremos obtener fórmulas para los desplazamientos y el giro de la sección B (u_B, v_B, θ_B) . Éstos últimos podrán descomponerse en una parte debida al movimiento del tramo AB como sólido rígido, y otra parte debida a la deformación del tramo AB como viga. A continuación evaluamos cada una de estas partes.

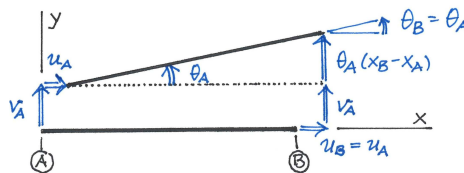
1. Desplazamientos de B debidos al movimiento del tramo AB como sólido rígido

Calculamos los movimientos de B producidos por una traslación y una rotación de valor θ_A alrededor de A:

$$u_B = u_A \quad (8.7a)$$

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) \quad (8.7b)$$

$$\theta_B = \theta_A \quad (8.7c)$$



Como aceptamos la hipótesis de pequeños desplazamientos y giros, la rotación alrededor de A no produce desplazamiento de B en la dirección x , y el desplazamiento de B en la dirección y se aproxima por el producto del ángulo de giro y la distancia entre A y B.

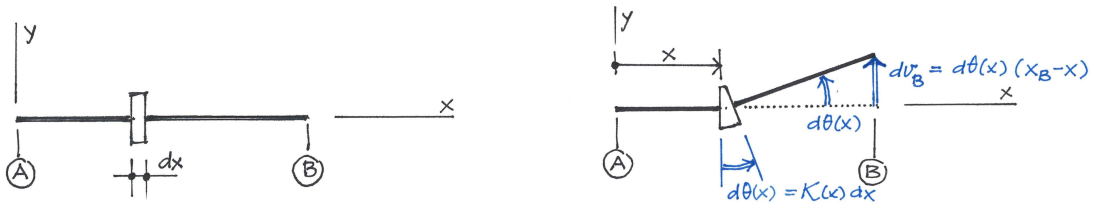
2. Desplazamientos de B debidos a la deformación del tramo AB

a) Deformación por flexión

Suponemos conocida la ley de momentos flectores $M(x)$ en el tramo AB de la viga. Consideramos la viga formada por rebanadas infinitesimales, de modo que cada rebanada se curva por efecto de la flexión. El valor de la curvatura se obtuvo al estudiar el problema elemental de flexión (5.14) y depende de valor del momento flector en la rebanada y de su rigidez $EI(x)$:

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} \quad (8.8)$$

Para estudiar el efecto de la curvatura en los desplazamientos y el giro de B vamos a suponer que únicamente se deforma la rebanada situada en x y que su extremo dorsal no gira.



La cara frontal de la rebanada experimenta un giro diferencial –recuérdese la ecuación (5.11)–:

$$d\theta(x) = \kappa(x) dx = \frac{M(x)}{EI(x)} dx$$

El giro diferencial de la cara frontal de la rebanada no produce desplazamiento horizontal en B, pero sí un desplazamiento diferencial en la dirección vertical. Además la sección B experimentará un giro diferencial igual al de la rebanada, de modo que:

$$dv_B(x) = d\theta(x)(x_B - x) = \frac{M(x)}{EI(x)}(x_B - x) dx$$

$$d\theta_B(x) = d\theta(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} dx$$

El desplazamiento vertical y el giro de B se obtienen integrando a lo largo de todo el tramo (es decir, sumando las contribuciones de todas las rebanadas del tramo):

$$v_B = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI(x)}(x_B - x) dx \quad (8.9a)$$

$$\theta_B = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI(x)} dx \quad (8.9b)$$

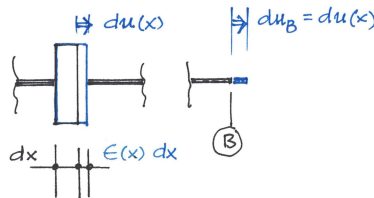
b) *Deformación por axil*

El tramo AB puede estar sometido a una ley de esfuerzos axiales $N(x)$. Cada rebanada experimenta un desplazamiento diferencial du en la dirección x dado por la expresión (5.7) obtenida en el capítulo 8.1

$$du_B(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

Integrando a lo largo del tramo se obtiene el desplazamiento de B debido a la deformación por axil:

$$u_B = \int_{x_A}^{x_B} \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (8.10)$$



La deformación por efecto del esfuerzo axil solo produce desplazamientos en la dirección de la directriz, por tanto no afecta a los desplazamientos transversales ni a los giros.

Sumando la contribución a los desplazamientos de B debida al movimiento como sólido rígido (8.7) y a la deformación del tramo (8.9), (8.10) se obtienen las **fórmulas de Navier–Bresse** para una barra recta cuya directriz se alinea con el eje x :

$$u_B = u_A + \int_{x_A}^{x_B} \frac{N(x)}{EA(x)} dx \quad (8.11a)$$

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI(x)} (x_B - x) dx \quad (8.11b)$$

$$\theta_B = \theta_A + \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI(x)} dx \quad (8.11c)$$

8.3. Teoremas de Mohr

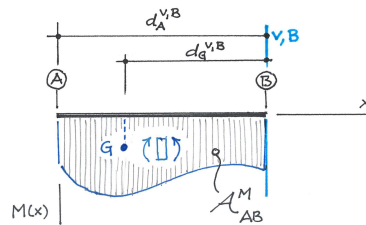
El ingeniero alemán Christian Otto Mohr (1835–1918) ideó un procedimiento para el cálculo de desplazamientos basado en las fórmulas de Navier–Bresse que permite eludir el cálculo de las integrales correspondientes. El procedimiento de Mohr es en realidad una versión gráfica de las fórmulas mencionadas cuando la barra es de sección constante. Resulta de gran utilidad,

ya que normalmente no llegamos a obtener la expresión matemática de las leyes de esfuerzos (necesaria para evaluar las integrales), pero sí obtenemos los diagramas de esfuerzos, sabemos cuál es su forma y calculamos valores significativos en los mismos.

Si consideramos un problema de flexión, sin alargamiento de la pieza, y admitimos que ésta es de sección constante, entonces EI sale de la integral y podemos escribir:

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M(x) dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} M(x) (x_B - x) dx$$



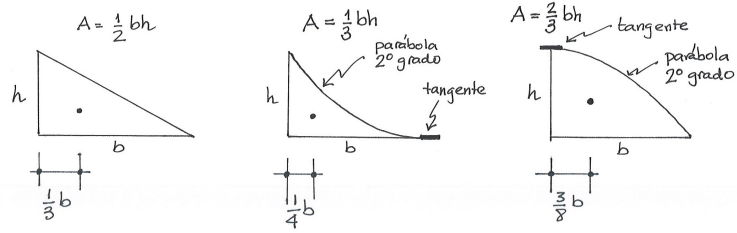
En la fórmula de los giros, la *integral es precisamente el área encerrada por el diagrama de momentos entre A y B* (con su signo correspondiente). En la fórmula de los desplazamientos, $x_B - x_A$ es la distancia entre A y B, y la *integral es el momento estático* (momento de primer orden) *del diagrama respecto de una recta perpendicular al tramo AB que pasa por B*, es decir, el producto del área del diagrama de momentos por la distancia de su centroide a la recta vertical que pasa por B. Usamos la siguiente notación para referirnos a la interpretación gráfica para formular los **Teoremas de Mohr** para la viga recta alineada con el eje x y sometida a flexión:

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M \tag{8.12a}$$

$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_G^{v,B} \tag{8.12b}$$

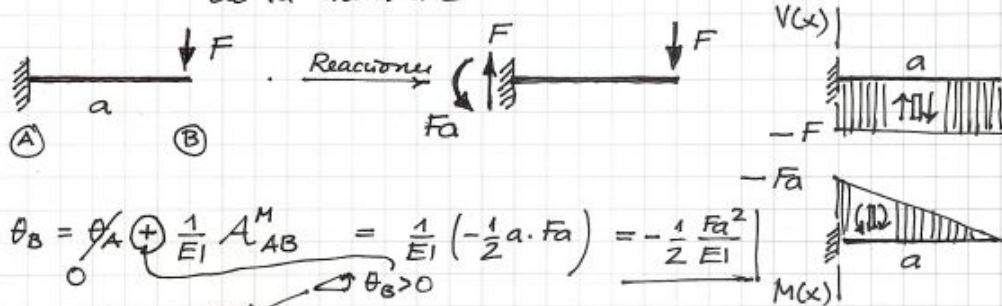
\mathcal{A}_{AB}^M es el área (con signo) encerrada por el diagrama de momentos flectores entre A y B, $d_A^{v,B}$ es la distancia desde A a la recta vertical que pasa por B, $d_G^{v,B}$ es la distancia desde el centroide G del área \mathcal{A}_{AB}^M a la recta vertical que pasa por B.

La primera expresión es conocida como *Primer Teorema de Mohr* o teorema del giro, y la segunda es el *Segundo Teorema de Mohr* o teorema de la flecha. Desde un punto de vista estricto no se trata de teoremas en sentido matemático, pero por tradición se ha mantenido esta denominación en los manuales de resistencia de materiales. Para la aplicación práctica de los teoremas de Mohr conviene recordar los resultados de la geometría elemental recogidos en la figura:



8. LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

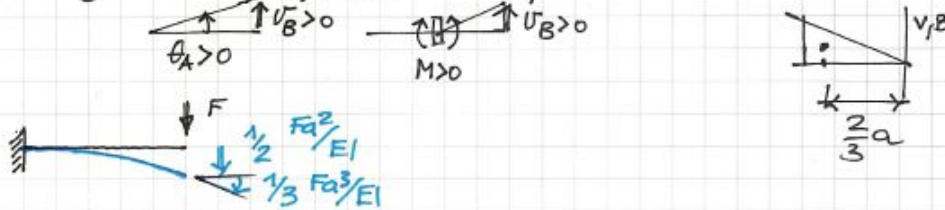
M 8-3.1 Obtener el giro y el desplazamiento en el extremo de la viga



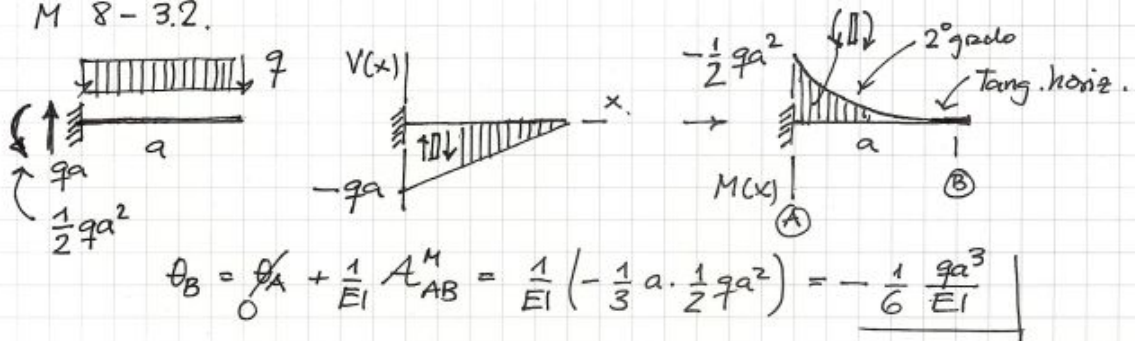
$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} a \cdot Fa \right) = -\frac{1}{2} \frac{Fa^2}{EI}$$

$\theta_B > 0$

$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_G = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} a Fa \right) \cdot \frac{2}{3} a = -\frac{1}{3} \frac{Fa^3}{EI}$$



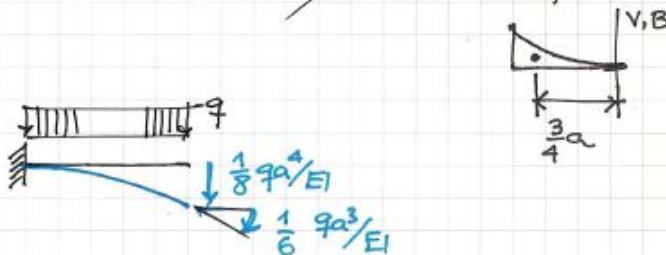
M 8-3.2.



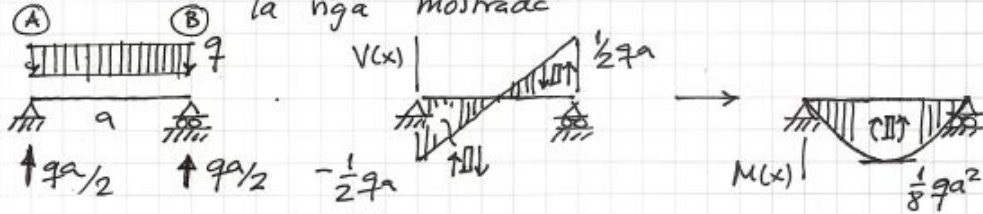
$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} qa^2 \right) = -\frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI}$$

$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_G^{v,B}$$

$$v_B = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} qa^2 \right) \cdot \frac{3}{4} a = -\frac{1}{8} \frac{qa^4}{EI}$$



M 8-4.1 Obtener los giros y la flecha en el centro de la viga mostrada



Para obtener el giro sabemos que $v_A = v_B = 0$ y podemos utilizar el 2º teorema entre A y B

$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_G^{v,B}$$

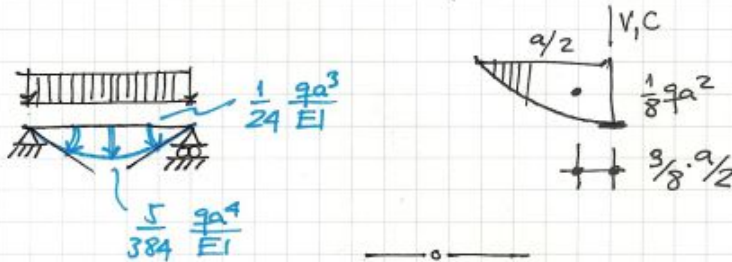
$$0 = \theta_A \cdot a + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{8} qa^2 \right) \cdot \frac{1}{2} a \quad \theta_A = -\frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (\cdot \leftarrow \downarrow)$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M = -\frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{8} qa^2 \right) = \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} \quad (\downarrow \cdot)$$

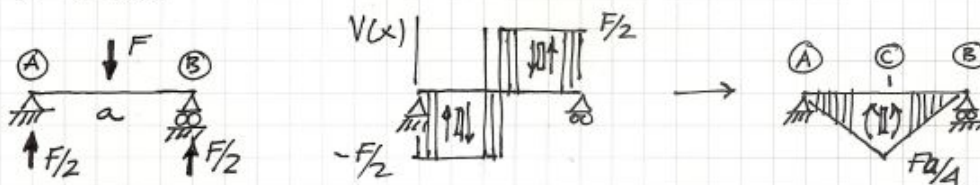
si MC es la sección del centro de la viga:

$$v_C = v_A + \theta_A d_A^{v,C} + \frac{1}{EI} A_{AC}^M d_G^{v,C}$$

$$= -\frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{8} qa^2 \right) \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{5}{384} \frac{qa^4}{EI} \quad (\downarrow)$$



M 8-4.2



$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_G^{v,B}$$

$$0 = \theta_A \cdot a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} a \cdot \frac{Fa}{4} \right) \cdot \frac{a}{2} \quad \rightarrow \quad \theta_A = -\frac{1}{16} \frac{Fa^2}{EI} \quad (\cdot \leftarrow \downarrow) \quad \text{SIGUE } \rightarrow$$

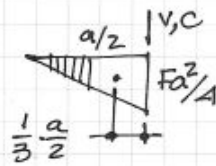
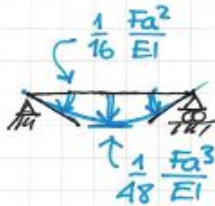
8. LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M = -\frac{1}{16} \frac{Fa^2}{EI} + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{Fa}{4} \right)$$

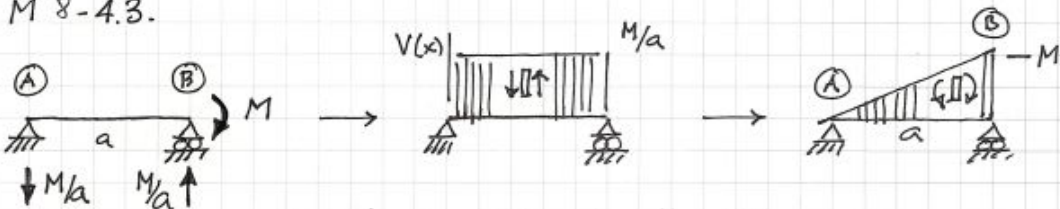
$$= \frac{1}{16} \frac{Fa^2}{EI} \quad \rightarrow$$

$$v_C = v_A + \theta_A d_A^{v,C} + \frac{1}{EI} A_{AC}^M d_G^{v,C}$$

$$v_C = -\frac{1}{16} \frac{Fa^2}{EI} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{Fa}{4} \right) \cdot \frac{1}{3} \frac{a}{2} = -\frac{1}{48} \frac{Fa^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

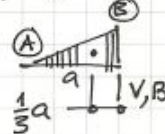


M 8-4.3.



$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_G^{v,B}$$

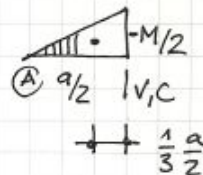
$$0 = \theta_A \cdot a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} a \cdot M \right) \cdot \frac{1}{3} a \rightarrow \theta_A = \frac{1}{6} \frac{Ma}{EI} \quad (\leftarrow)$$



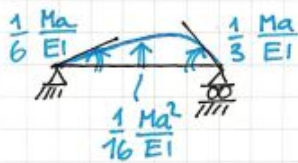
$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M = \frac{1}{6} \frac{Ma}{EI} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} a \cdot M \right) = -\frac{1}{3} \frac{Ma}{EI} \quad (\rightarrow)$$

$$v_C = v_A + \theta_A d_A^{v,C} + \frac{1}{EI} A_{AC}^M d_G^{v,C}$$

$$v_C = \frac{1}{6} \frac{Ma}{EI} \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \frac{a}{2} \cdot M \right) \cdot \frac{1}{3} \frac{a}{2} = \frac{1}{16} \frac{Ma^2}{EI} \quad (\uparrow)$$



(no es la flecha máxima)



M 8-5

Obtener el desplazamiento de B y los giros de B y C.
Representar la deformada de la estructura

El diagrama de momentos de este tramo se puede descomponer en a) el producido por la carga uniforme, y b) el producido por la carga puntual

En la figura se puede observar la suma geométrica de ambos diagramas

curvaturas

$$U_B = U_A + \theta_A \cdot d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_G^{v,B}$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 2a \cdot (-2qa^2) \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot qa^2 \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a$$

$$= -2 \frac{qa^4}{EI} + \frac{4}{3} \frac{qa^4}{EI} = -\frac{2}{3} \frac{qa^4}{EI} \quad (\downarrow)$$

flecha debida a la carga repartida flecha debida a la carga puntual

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 2a \cdot (-2qa^2) \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot qa^2 \right)$$

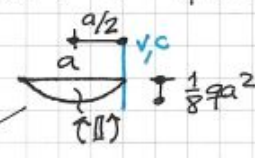
$$= -\frac{4}{3} \frac{qa^3}{EI} + \frac{qa^3}{EI} = -\frac{1}{3} \frac{qa^3}{EI} \quad (\leftarrow)$$

giro debido a la carga repartida giro debido a la carga puntual Este es el giro de B por la izquierda

8. LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

Para calcular el giro de B por la derecha usamos el segundo teorema de Mohr entre B, y C, ya que conocemos los desplazam:

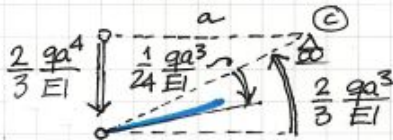
$$\theta_C = \theta_B + \theta_B'' d_B^{v,C} + \frac{1}{EI} A_{BC}^M d_G^{v,C}$$



$$0 = -\frac{2}{3} \frac{qa^4}{EI} + \theta_B'' \cdot a + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{8} qa^2 \right) \cdot \frac{a}{2}$$

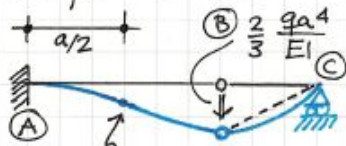
$$\theta_B'' = \frac{2}{3} \frac{qa^3}{EI} - \frac{1}{24} \frac{qa^3}{EI} = \frac{15}{24} \frac{qa^3}{EI}$$

↑ Giro producido por la carga distribuida
 ↑ Giro debido al momento de sólido rígido del tramo BC



$$\theta_C = \theta_B + \frac{1}{EI} A_{BC}^M = \frac{15}{24} \frac{qa^3}{EI} + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} a \cdot \frac{1}{8} qa^2 \right) = \frac{17}{24} \frac{qa^3}{EI}$$

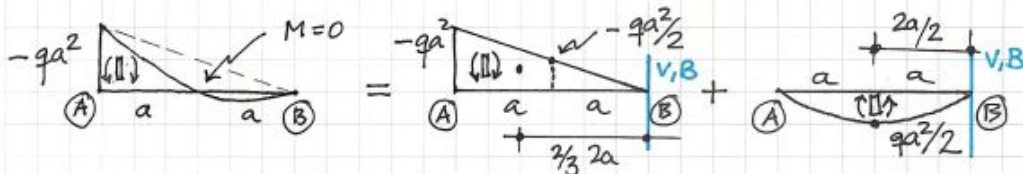
La deformada de la estructura es



P.I. correspondiente a $M=0$



Para el cálculo de v_B y θ_B se podría haber usado la siguiente descomposición alternativa del diagrama de momentos:



$$v_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (-qa^2) \right) \frac{2}{3} \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{qa^2}{2} \right) \cdot \frac{2a}{2} = -\frac{2}{3} \frac{qa^4}{EI}$$

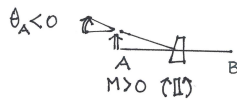
8.3.1. Signos de las fórmulas

En ciertas ocasiones es preferible avanzar desde una sección situada a la derecha hasta una situada a la izquierda en la viga. En este caso es necesario revisar los signos de las fórmulas (8.12). Si se comprende bien el significado físico de cada término de la fórmula, entonces la determinación de los signos no es un problema.

Suponiendo ahora que avanzamos desde B hasta A, y comenzando por la fórmula de giros, el giro de A se obtendrá sumando al giro de B el término correspondiente al giro producido por la deformación de flexión. Para ello conviene responder mediante un croquis a la siguiente pregunta:

¿Qué signo tiene el giro en A producido por un momento positivo en el tramo AB cuando avanzamos de B a A?

$$\theta_A = \theta_B - \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M$$



En el croquis representamos una rebanada cualquiera de la viga, suponiendo que la cara más próxima al extremo B (extremo del que partimos) no gira, y que la cara más próxima al extremo A (extremo en el que deseamos calcular el giro) sí gira, y lo hace en el sentido correspondiente al del momento positivo que actúa en ese tramo. El croquis se completa con el tramo de viga entre la rebanada y A. Como se ve, un momento positivo en el tramo produce un giro antihorario (negativo) en A. Por lo tanto el signo correspondiente del término de flexión es negativo.

Continuando con la fórmula de los desplazamientos verticales, es necesario analizar dos términos. El correspondiente al giro de sólido rígido, para el que nos preguntaremos

¿Qué signo tiene el desplazamiento vertical en A producido por un giro positivo de B?

Y el correspondiente a la deformación por flexión:

¿Qué signo tiene el desplazamiento vertical en A producido por un momento positivo en el tramo AB cuando avanzamos de B a A?

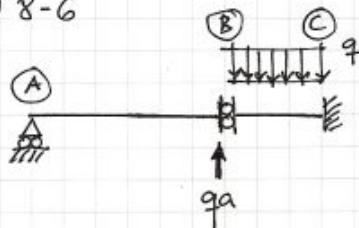
$$v_A = v_B - \theta_B d_B^{v,A} + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_G^{v,A}$$



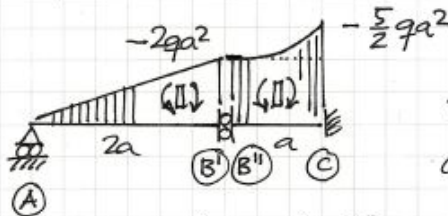
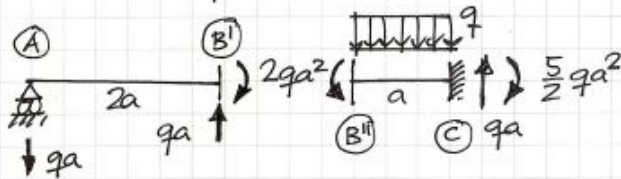
Dibujamos ahora dos croquis, uno para el giro de B, que como se ve produce un desplazamiento vertical de A hacia abajo (negativo), y otro para el momento, que va a producir el efecto contrario. El esquema del momento es el mismo que se había dibujado para analizar el giro de A, por tanto puede aprovecharse aquel. Es necesario indicar que al determinar los signos de la fórmula por este procedimiento, el factor $d_B^{v,A}$ (distancia de B a la vertical que pasa por A) debe tomarse siempre positivo, al igual que $d_G^{v,A}$ (distancia del centroide del diagrama de momentos a la vertical que pasa por A). Sin embargo, al giro θ_B se le asignará el signo que tenga (positivo si es antihorario y viceversa), y al área de momentos \mathcal{A}_{AB}^M se le asignará el signo que le corresponda según el criterio de signos del momento flector.

8. LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

M 8-6



Obtener los momentos de B y representar la deformada a escala.



Para calcular los desplazamientos de B'' conviene avanzar de C a B

$$v_{B''} = v_C + \theta_C d_C^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{BC}^M d_G^{v,B} = \frac{1}{EI} (a(-2qa^2)) \cdot \frac{1}{3}a +$$

$$+ \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3}a \left(-\frac{1}{2}qa^2 \right) \right) \frac{3}{4}a$$

$$\hookrightarrow v_{B''} = -\frac{qa^4}{EI} - \frac{1}{8} \frac{qa^4}{EI} = -\frac{9}{8} \frac{qa^4}{EI} \quad (v_{B''} \downarrow)$$

$$\theta_{B''} = \theta_C - \frac{1}{EI} A_{BC}^M = -\frac{1}{EI} (a(-2qa^2)) - \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3}a \left(-\frac{1}{2}qa^2 \right) \right)$$

$$\hookrightarrow \theta_{B''} = 2 \frac{qa^3}{EI} + \frac{1}{6} \frac{qa^3}{EI} = \frac{13}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (\theta_{B''} \rightarrow)$$

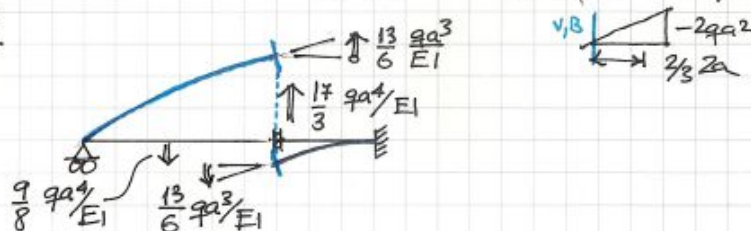
Para calcular el desplazamiento de B' sabemos que $\theta_{B'} = \theta_{B''} = \frac{13}{6} \frac{qa^3}{EI}$

$$\text{Entonces: } \theta_A = \theta_B - \frac{1}{EI} A_{AB}^M$$

$$\hookrightarrow \theta_A = \frac{13}{6} \frac{qa^3}{EI} - \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a(-2qa^2) \right) = \frac{27}{6} \frac{qa^3}{EI} \quad (\theta_A \rightarrow)$$

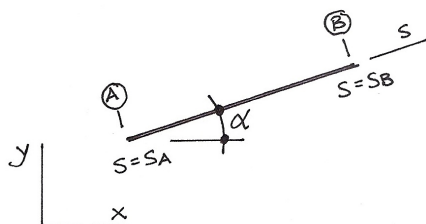
$$v_{B'} = v_A + \theta_A \cdot d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_G^{v,B} = \frac{27}{6} \frac{qa^3}{EI} \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a(-2qa^2) \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = *$$

$$* = \frac{17}{3} \frac{qa^4}{EI}$$



8.4. Cálculo de desplazamientos en barras no coincidentes con el eje x

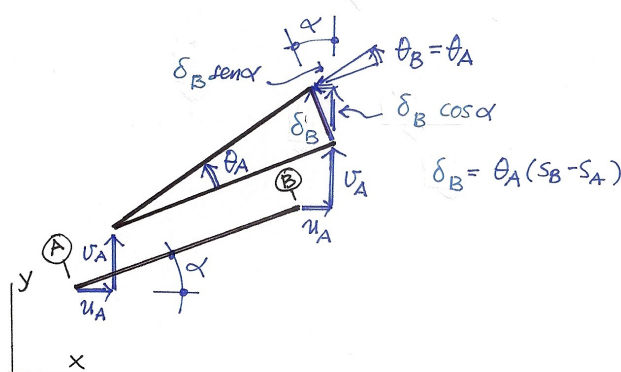
En esta sección se generalizan las fórmulas de Navier–Bresse y los teoremas de Mohr para poder obtener desplazamientos en barras rectas cuya directriz no coincide con el eje x . Se incluye también, para mayor generalidad, los términos correspondientes a la deformación por axil.



Consideramos una barra que forma un ángulo α con el eje x . Para escribir las integrales consideramos la variable s que mide la longitud sobre la directriz de la barra. Analizamos de nuevo el efecto del movimiento de sólido rígido, y después el de la deformación de la barra.

1. Desplazamientos de B debidos al movimiento del tramo AB como sólido rígido

Como se observa en la figura, admitiendo la hipótesis de pequeños desplazamientos y giros, la rotación de la barra alrededor de A produce un desplazamiento de B ortogonal a la misma de valor $\theta_A(s_B - s_A)$.



El desplazamiento se puede descomponer según los ejes x e y , de modo que

$$u_B = u_A - \theta_A(s_B - s_A) \sin \alpha = u_A - \theta_A(y_B - y_A)$$

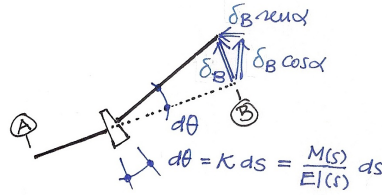
$$v_B = v_A + \theta_A(s_B - s_A) \cos \alpha = v_A + \theta_A(x_B - x_A)$$

El giro es, evidentemente, el mismo en ambos extremos del tramo:

$$\theta_B = \theta_A$$

2. Desplazamientos de B debidos a la deformación del tramo AB

a) Deformación por flexión



Del mismo modo que sucede con el giro de sólido rígido, la deformación debida a la flexión produce un desplazamiento ortogonal a la barra de valor

$$\int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)} (s_B - s) ds,$$

que se descompone en las direcciones coordenadas:

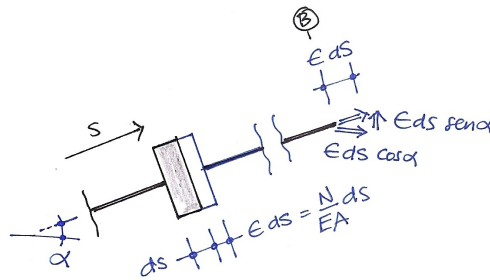
$$u_B = - \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)} (s_B - s) \sin \alpha ds = - \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)} (y_B - y) ds$$

$$v_B = \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)} (s_B - s) \cos \alpha ds = \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)} (x_B - x) ds$$

El giro es, como en la barra alineada con x ,

$$\theta_B = \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)} ds$$

b) Deformación por axil



El alargamiento de las rebanadas desde A hasta B produce un desplazamiento en B en la dirección de la barra igual a

$$\int_{s_A}^{s_B} \frac{N(s)}{EA(s)} ds$$

Como en los casos anteriores, se descompone en las direcciones x e y :

$$u_B = \int_{s_A}^{s_B} \frac{N(s)}{EA(s)} \cos \alpha ds$$

$$v_B = \int_{s_A}^{s_B} \frac{N(s)}{EA(s)} \sin \alpha ds$$

Este modo de deformación no produce giros en B.

Sumando todos estos efectos obtenemos las **fórmulas de Navier–Bresse generalizadas** al caso de la barra recta no coincidente con el eje x :

$$u_B = u_A - \theta_A(y_B - y_A) - \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)}(y_B - y) ds + \int_{s_A}^{s_B} \frac{N(s)}{EA(s)} \cos \alpha ds \quad (8.13a)$$

$$v_B = v_A + \theta_A(x_B - x_A) + \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)}(x_B - x) ds + \int_{s_A}^{s_B} \frac{N(s)}{EA(s)} \sin \alpha ds \quad (8.13b)$$

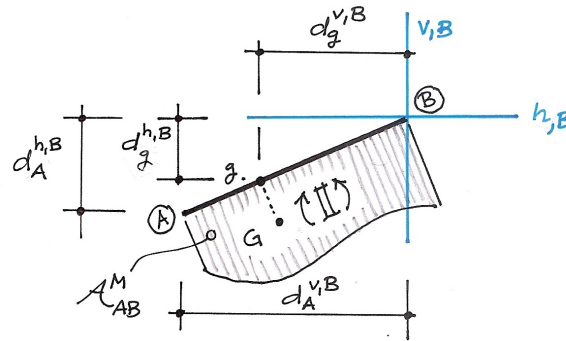
$$\theta_B = \theta_A + \int_{s_A}^{s_B} \frac{M(s)}{EI(s)} ds \quad (8.13c)$$

Cuando la barra es de sección constante las rigideces salen de las integrales y podemos deducir fácilmente la versión *geométrica*, que constituiría una **generalización de los teoremas de Mohr** vistos en la sección anterior:

$$u_B = u_A - \theta_A d_A^{h,B} - \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_g^{h,B} + \frac{1}{EA} \mathcal{A}_{AB}^N \cos \alpha \quad (8.14a)$$

$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_g^{v,B} + \frac{1}{EA} \mathcal{A}_{AB}^N \sin \alpha \quad (8.14b)$$

$$\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M \quad (8.14c)$$



\mathcal{A}_{AB}^N y \mathcal{A}_{AB}^M son, respectivamente, las áreas (con signo) de los diagramas de esfuerzos axiales y momentos flectores en el tramo AB.

$d_A^{h,B}$ y $d_A^{v,B}$ son, respectivamente, la distancia de A a la recta horizontal o vertical que pasa por B.

$d_g^{h,B}$ y $d_g^{v,B}$ representan, respectivamente, la distancia desde la proyección del centroide del diagrama de momentos sobre la directriz de la barra (que denominaremos g) a la recta horizontal o vertical que pasa por B.

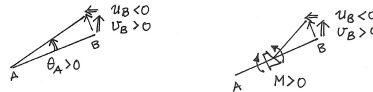
8.4.1. Signos de las fórmulas en el caso general

Las expresiones (8.14) son válidas para una barra de A a B cuando B se sitúa a la derecha de A. Sin embargo, en muchas ocasiones las secciones A y B tienen otra posición relativa y/o ni

quiera se encuentran sobre la misma barra. En estos casos se puede aplicar las fórmulas, como se hizo en el caso de la viga recta, siempre y cuando el signo de cada término se determine *ex-profeso* siguiendo los mismos criterios del apartado 8.3.1. Como ejemplo obtenemos los signos de las fórmulas (sin deformación por axil) para la barra orientada como en las figuras anteriores:

- Desplazamientos y giro de B calculado desde A

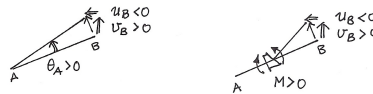
$$u_B = u_A - \theta_A d_A^{h,B} - \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_g^{h,B} \quad (8.15)$$



$$v_B = v_A + \theta_A d_A^{v,B} + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_g^{v,B} \quad (8.16)$$

- Desplazamientos y giro de A calculado desde B

$$u_A = u_B + \theta_B d_B^{h,A} - \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_g^{h,B} \quad (8.17)$$



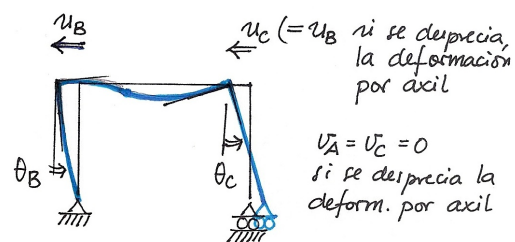
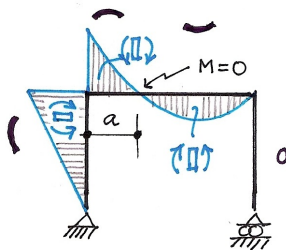
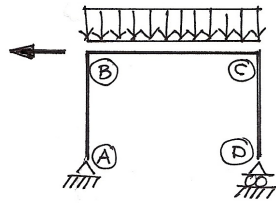
$$v_A = v_B - \theta_B d_B^{v,A} + \frac{1}{EI} \mathcal{A}_{AB}^M d_g^{v,B} \quad (8.18)$$

8.5. Representación de la deformada

Para representar la deformada de la estructura se seguirá los siguientes criterios:

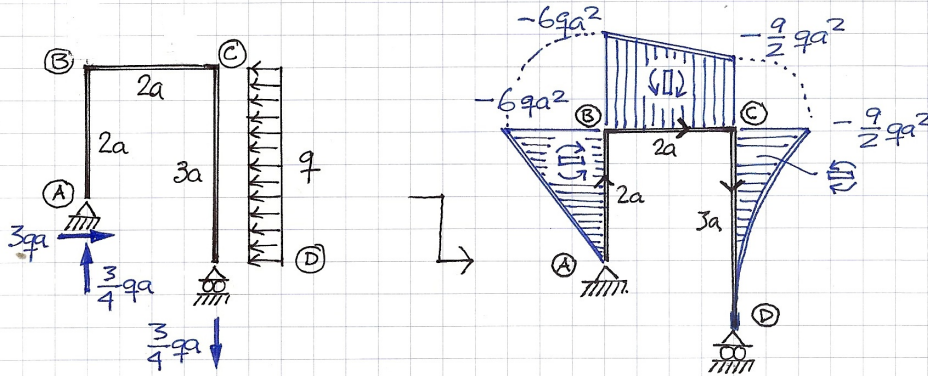
- En primer lugar se calculan los desplazamientos y giros en un número representativo de secciones de la estructura. Conviene tener en cuenta que **los desplazamientos debidos a la deformación axil de una barra son despreciables frente a los debidos a la flexión**. Por este motivo, cuando se calcula los movimientos de la estructura mediante los teoremas de Mohr con el fin de representar la deformada, generalmente se desprecia la deformación por axil.
- Si se ha despreciado los movimientos debidos a la deformación por axil entonces los desplazamientos de un nudo son ortogonales a la directriz de las barras que confluyen en el nudo (ya que se desprecia su alargamiento o acortamiento).
- El signo de la curvatura de las barras se corresponde directamente con el signo del momento flector. Por tanto, en aquellas secciones en las que el flector sea nulo, la deformada presenta un punto de inflexión.
- Es necesario respetar las condiciones de contorno en los apoyos para dibujar correctamente la deformada.

8.5. Representación de la deformada



8. LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

M 8-7 Obtener los movimientos de los nudos y representar la deformada a estima. Se despreciará la deformación por axil.



□ Los siguientes desplazamientos pueden obtenerse directamente:

$v_B = 0$, por la indeformabilidad axial de la barra AB

$u_C = u_B$, por la indeformabilidad axial de la barra BC

$v_C = 0$, por la indeformabilidad axial de la barra CD

□ En primer lugar se obtiene el giro de A

$$v_C = v_A + \theta_A d_A^{v,C} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_q^{v,C} + \frac{1}{EI} A_{BC}^M d_q^{v,C}$$

$$0 = \theta_A \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot (-6qa^2) \right) \cdot 2a + \frac{1}{EI} \left(2a \cdot \left(-\frac{9}{2} qa^2 \right) \right) \cdot a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{3}{2} qa^2 \right) \right) \cdot \frac{3}{2} \cdot 2a$$

$$\hookrightarrow \theta_A = \frac{23}{2} \frac{qa^3}{EI} \quad (\uparrow)$$

□ A continuación, el movimiento horizontal de B

$$u_B = u_A - \theta_A d_A^{H,B} - \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_q^{H,B} = -\frac{23}{2} \frac{qa^3}{EI} \cdot 2a - \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 6qa^2 \right) \cdot \frac{2}{3} a$$

$$\hookrightarrow u_B = -19 \frac{qa^4}{EI} \quad (\leftarrow) = u_C$$

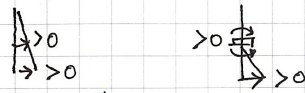
□ Giro de C : $\theta_C = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M + \frac{1}{EI} A_{BC}^M = \theta_B + \frac{1}{EI} A_{BC}^M$

$$\theta_C = \frac{23}{2} \frac{qa^3}{EI} + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 6qa^2 \right) + \frac{1}{EI} \left(-2a \cdot \frac{9}{2} qa^2 \right) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{3}{2} qa^2 \right)$$

$$\theta_B = \frac{11}{2} \frac{qa^3}{EI} \quad \theta_C = \left(\frac{11}{2} - \frac{21}{2} \right) \frac{qa^3}{EI} = -\frac{10}{2} \frac{qa^3}{EI}$$

□ Desplazamiento horizontal de D, calculado a partir de C

$$u_D = u_C + \theta_C d_C^{H,D} + \frac{1}{EI} A_{CD}^M d_g^{H,D}$$



$$u_D = -19 \frac{qa^4}{EI} - \frac{10}{8} \frac{qa^3}{EI} \cdot 3a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{8} \cdot 3a \cdot (-\frac{9}{2} qa^2) \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot 3a$$

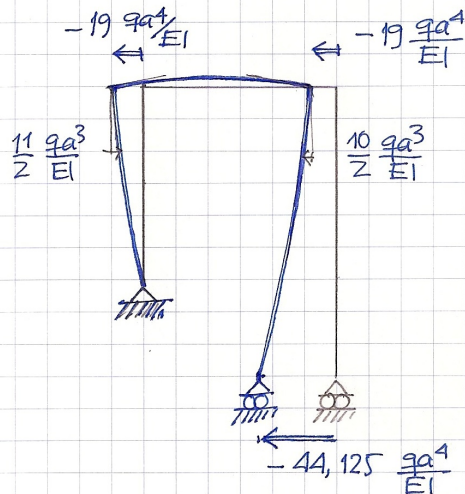
$$\hookrightarrow u_D = -44,125 \frac{qa^4}{EI} \quad (\leftarrow)$$

□ Comprobación, calculando u_D a partir de A

$$u_D = \frac{u_A}{0} + \theta_A d_A^{H,D} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_g^{H,D} + \frac{1}{EI} A_{BC}^M d_g^{H,D} + \frac{1}{EI} A_{CD}^M d_g^{H,D}$$

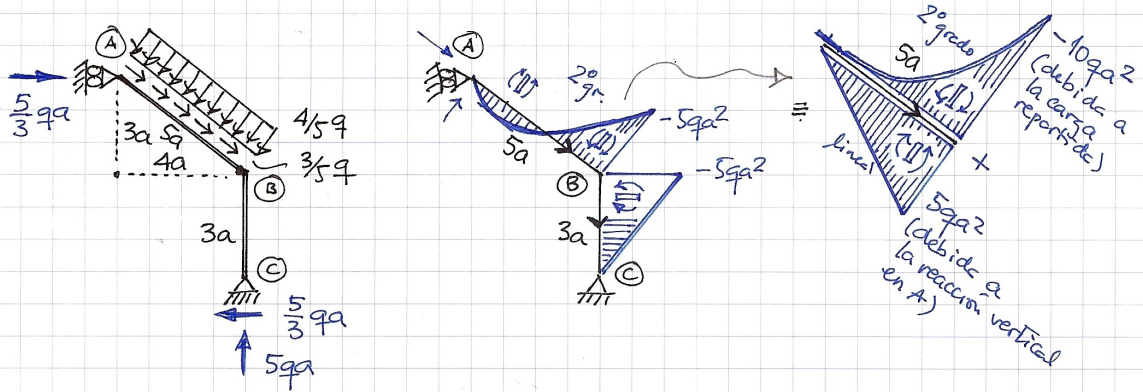
$$u_D = \frac{23}{2} \cdot \frac{qa^3}{EI} \cdot a + \frac{1}{EI} (-6qa^3) \left(\frac{4}{3}a + a \right) + \frac{1}{EI} (-9qa^3) \cdot 3a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{3}{2}qa^3 \right) \cdot 3a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{81}{8} qa^4 \right) = -44,125 \frac{qa^4}{EI} \quad \checkmark$$

□ Representación de la deformada



8. LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

M 8-8 Obtener los movimientos de los nudos y representar la deformada a estima. Se despreciará la deformación por axil



□ $U_B = 0$, por la indeformabilidad axil de BC

□ En primer lugar se obtiene el giro de A

$$u_C = u_A + \theta_A d_A^{H,C} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_g^{H,C} + \frac{1}{EI} A_{BC}^M d_g^{H,C}$$

$$0 = \theta_A 6a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{3} \cdot 5a \cdot 10qa^2 \right) \cdot \frac{5}{4} a + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5a \cdot 5qa^2 \right) \cdot 4a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 5qa^2 \right) \cdot 2a \rightarrow \theta_A = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{125}{2} - 50 + 15 \right) \frac{qa^3}{EI}$$

$$\frac{2}{3} \cdot 3a = 2a \quad \hookrightarrow \theta_A = \frac{15}{4} \frac{qa^3}{EI}$$

□ Giro de B $\theta_B = \theta_A + \frac{1}{EI} A_{AB}^M = \frac{15}{4} \frac{qa^3}{EI} - \frac{50}{3} \frac{qa^3}{EI} + \frac{25}{2} \frac{qa^3}{EI} = -\frac{5}{12} \frac{qa^3}{EI}$

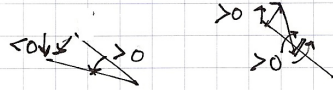
□ $U_B = u_A + \theta_A d_A^{H,B} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_g^{H,B}$

$$U_B = \frac{15}{4} \frac{qa^3}{EI} \cdot 3a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{50}{3} qa^3 \right) \cdot \frac{3}{4} a + \frac{1}{EI} \left(\frac{25}{2} qa^3 \right) \cdot a$$

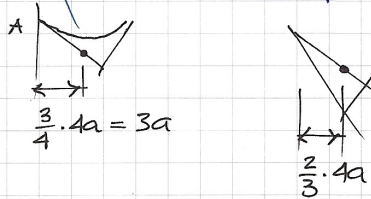
↳ $U_B = \frac{45}{4} \frac{qa^4}{EI} \quad (\Rightarrow)$

II El desplazamiento vertical de A se calcula a partir de B

$$U_A = U_B - \theta_B d_B^{V,A} + \frac{1}{EI} A_{AB}^M d_g^{V,A}$$

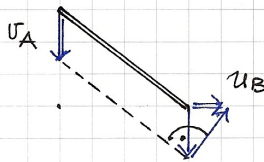


$$U_A = 0 - \left(-\frac{5}{12} \frac{qa^3}{EI}\right) \cdot 4a + \frac{1}{EI} \left(-\frac{50}{3} qa^3\right) \cdot 3a + \frac{1}{EI} \left(\frac{25}{2} qa^3\right) \frac{4}{3} a$$



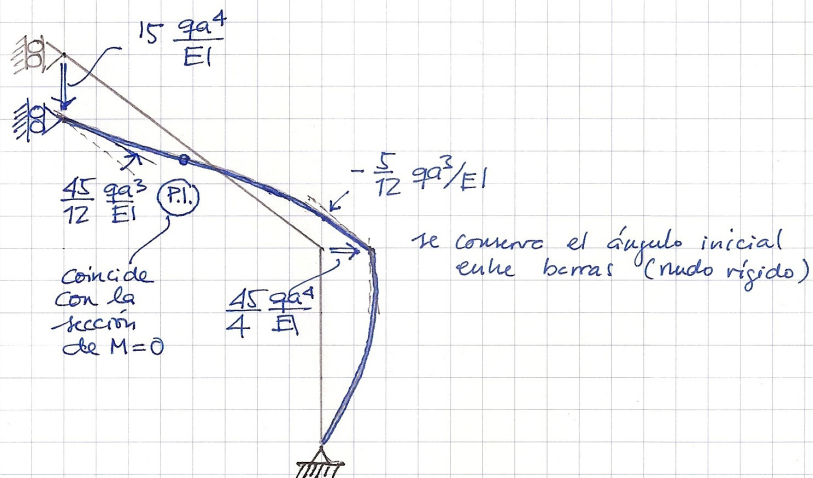
$$U_A = \frac{5}{3} \frac{qa^4}{EI} - 50 \frac{qa^4}{EI} + \frac{100}{3} \frac{qa^4}{EI} = \underline{\underline{-15 \frac{qa^4}{EI}} \quad (\downarrow)}$$

II Comprobación geométrica



La relación geométrica entre U_B y U_A ^{debe} estar en la misma proporción que los lados de la barra AB

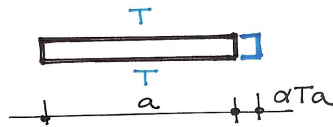
$$\frac{U_B}{U_A} = \frac{45}{4} \cdot \frac{1}{15} = \frac{3}{4} \quad \checkmark \quad \text{se cumple}$$



8.6. Deformaciones y desplazamientos debidos a cambios de temperatura

8.6.1. Deformaciones y movimientos debidos a un incremento uniforme de temperatura

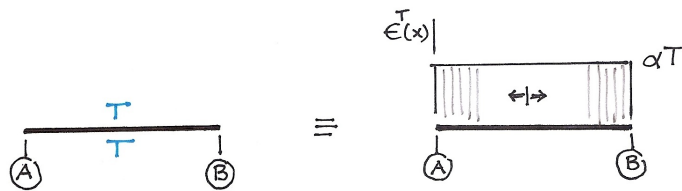
Si observamos una barra AB de longitud a sometida a un **incremento uniforme de temperatura** de valor T , podemos medir un alargamiento $\delta_{AB} = \alpha T a$. En esta expresión α es el **coeficiente de dilatación** del material que forma la barra. Sus unidades son $m/m^{\circ}C$.



El resultado de este experimento indica que el alargamiento unitario de la directriz de la barra debido al incremento de temperatura es

$$\epsilon^T = \delta_{AB}/a = \alpha T \quad (8.19)$$

Con este dato podemos calcular la contribución al movimiento relativo del extremo B respecto del A de forma similar al movimiento debido a la deformación por axil. Para ello representamos el diagrama de alargamientos unitarios debidos a la temperatura entre A y B:



La contribución al desplazamiento horizontal de B relativo a A será:

$$\Delta u^{\epsilon^T} = \int_{x_A}^{x_B} \epsilon^T dx = \mathcal{A}_{AB}^{\epsilon^T} = \alpha T a \quad (8.20)$$

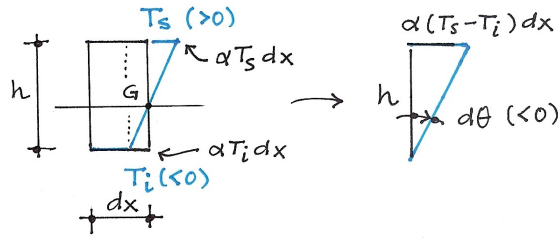
Si la barra forma un ángulo β con la horizontal, el desplazamiento tendrá componente horizontal y vertical.

$$\Delta u^{\epsilon^T} = \int_{s_A}^{s_B} \cos \beta \epsilon^T ds = \mathcal{A}_{AB}^{\epsilon^T} \cos \beta = \alpha T d_A^{h,B} \quad (8.21a)$$

$$\Delta v^{\epsilon^T} = \int_{s_A}^{s_B} \sin \beta \epsilon^T ds = \mathcal{A}_{AB}^{\epsilon^T} \sin \beta = \alpha T d_A^{v,B} \quad (8.21b)$$

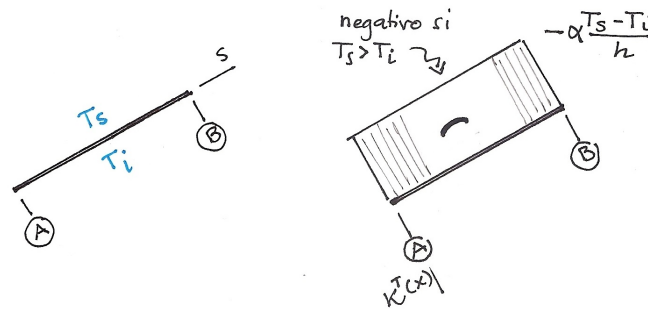
8.6.2. Deformaciones y movimientos debidos a un gradiente térmico puro

Denominamos **gradiente térmico puro** a un cambio de temperatura de distinto valor en las fibras superior e inferior de la sección, tal que el incremento a la altura del centroide de la sección es nulo (admitiendo que el cambio de temperatura es lineal a lo largo del canto de la sección). Si T_s y T_i son los incrementos de temperatura en la fibra superior e inferior de la sección y h es el canto, entonces el gradiente vale $(T_s - T_i)/h$. En este caso la rebanada se deforma como se indica en la figura.



El alargamiento de la fibra superior es $\alpha T_s dx$ y el de la inferior $\alpha T_i dx$, por tanto, el giro de la cara dorsal respecto de la frontal es $-\alpha (T_s - T_i) dx/h$. A su vez, el giro expresado en función de la curvatura es $\kappa^T dx$. Igualando ambas expresiones se obtiene

$$\kappa^T = -\alpha \frac{T_s - T_i}{h} \quad (8.22)$$



Para calcular la contribución del gradiente a los desplazamientos y al giro de B relativo a A dibujamos el diagrama de curvaturas producidas por el gradiente en el tramo AB, y operamos como en la deducción de los teoremas de Mohr. Entonces,

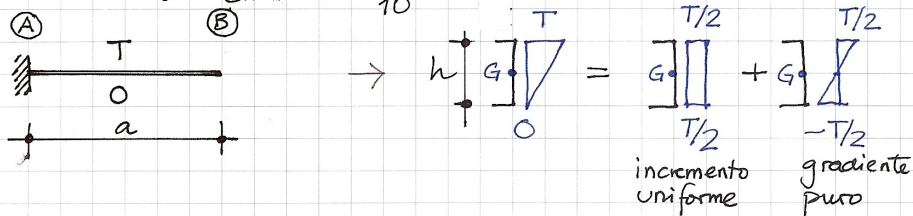
$$\Delta u^{\kappa^T} = - \int_{s_A}^{s_B} \kappa^T (s_B - s) \sin \beta ds = -\mathcal{A}_{AB}^{\kappa^T} d_g^{h,B} \quad (8.23a)$$

$$\Delta v^{\kappa^T} = \int_{s_A}^{s_B} \kappa^T (s_B - s) \cos \beta ds = \mathcal{A}_{AB}^{\kappa^T} d_g^{v,B} \quad (8.23b)$$

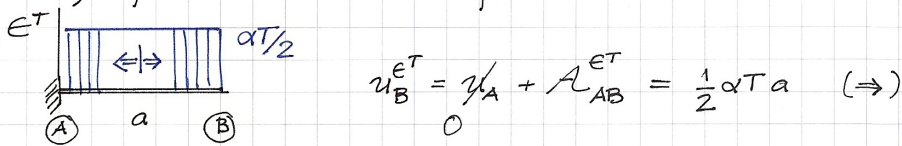
$$\Delta \theta^{\kappa^T} = \int_{s_A}^{s_B} \kappa^T ds = \mathcal{A}_{AB}^{\kappa^T} \quad (8.23c)$$

8. LA DEFORMADA DE LA ESTRUCTURA

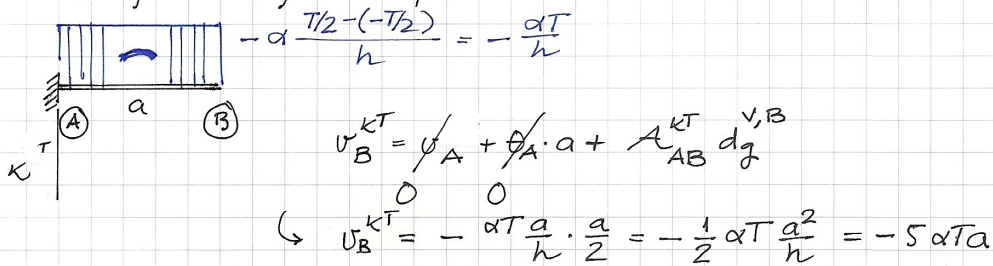
M 8-9a Obtener el desplazamiento y giro en el extremo y representar la deformada a estima. La sección es simétrica de canto $h = \frac{a}{10}$



A) Efecto del incremento uniforme



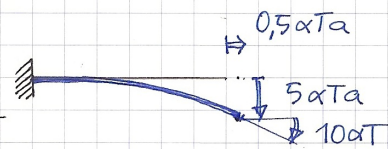
B) Efecto del gradiente puro



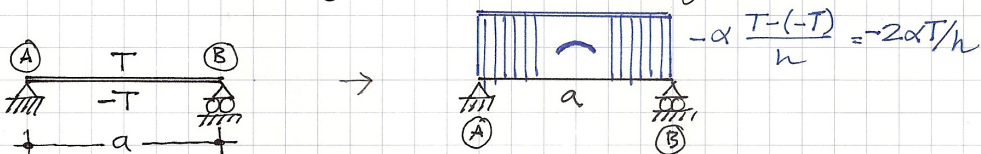
□ Los esfuerzos en la viga son nulos

□ Deformada a estima

$$\theta_B^{KT} = \theta_A^{KT} + A_{AB}^{KT} = -\alpha T \frac{a}{h} = -10 \alpha T$$



M 8-9b Obtener los giros en los extremos y representar la deformada



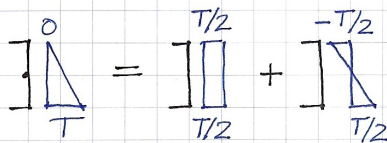
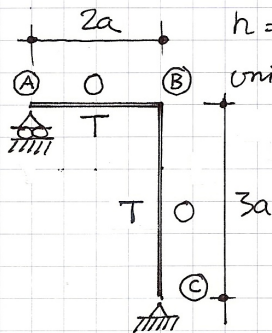
$$u_B^{KT} = u_A^{KT} + \theta_A^{KT} d_A^{v,B} + A_{AB}^{KT} d_B^{v,B} \rightarrow \theta_A^{KT} = \frac{-1}{\alpha} \left(-2 \alpha T \frac{a}{h} \right) \cdot \frac{a}{2} = \alpha T \frac{a}{h}$$

$$\theta_B^{KT} = \theta_A^{KT} + A_{AB}^{KT} = \alpha T \frac{a}{h} + \left(-2 \alpha T \frac{a}{h} \right) = -\alpha T \frac{a}{h}$$

□ $u_B = 0$ (no hay incremento uniforme de temperatura)

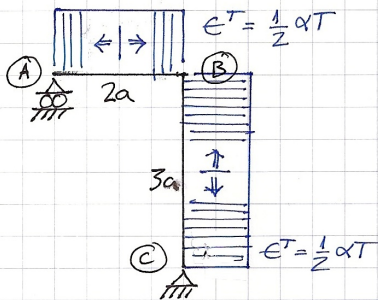


M 8-10 Obtener los movimientos de los nudos y representar la deformada a escala. La sección es simétrica de canto $h = \frac{a}{15}$. Representar por separado el efecto del incremento uniforme y el del gradiente puro.



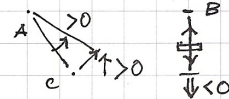
Los esfuerzos en la estructura son nulos (e. isostática)

A) Efecto del incremento uniforme



En este caso es necesario considerar también el efecto de los giros debido al alargamiento de la barra BC

$$v_c = v_A + \theta_A d_A^{v,c} - A_{BC}^{\epsilon T} \quad \theta_A = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{2} \alpha T \cdot 3a \right) = \frac{3}{4} \alpha T$$

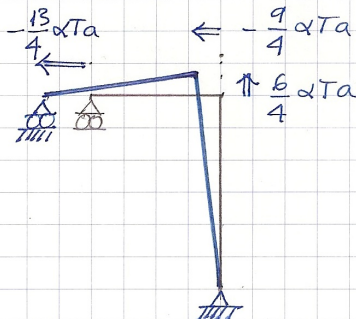
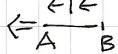


$$\theta_c = \theta_B = \theta_A$$

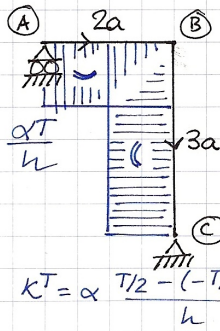
$$v_B = v_c + A_{BC}^{\epsilon T} = \frac{1}{2} \alpha T \cdot 3a = \frac{3}{2} \alpha T a$$

$$u_B = v_c - \theta_c d_c^{u,B} = -\frac{3}{4} \alpha T \cdot 3a = -\frac{9}{4} \alpha T a$$

$$u_A = u_B - A_{AB}^{\epsilon T} = -\frac{9}{4} \alpha T a - \frac{1}{2} \alpha T \cdot 2a = -\frac{13}{4} \alpha T a$$



B) Efecto del gradiente puro



□ Giro de C

$$v_A = v_C - \theta_C d_C^{v,A} + A_{BC}^{KT} d_g^{v,A} + A_{AB}^{KT} d_g^{v,A}$$

$$0 = 0 - \theta_C \cdot 2a + \left(\frac{\alpha T}{h} \cdot 3a\right) \cdot 2a + \left(\frac{\alpha T}{h} \cdot 2a\right) a$$

$$\theta_C \cdot 2a = \left(\frac{\alpha T}{h} \cdot 3a\right) \cdot 2a + \left(\frac{\alpha T}{h} \cdot 2a\right) a$$

$$k^T = \alpha \frac{T/2 - (-T/2)}{h} = \frac{\alpha T}{h} \quad \hookrightarrow \quad \theta_C = 4\alpha T \frac{a}{h} = 60\alpha T$$

$v_B^{KT} = 0$, ya que el incremento uniforme se ha considerado antes

$u_A^{KT} = u_B^{KT}$, por el mismo motivo

$$\square \quad u_B^{KT} = v_C - \theta_C d_C^{H,B} + A_{BC}^{KT} d_g^{H,B} = -4\alpha T \frac{a}{h} \cdot 3a + \left(\frac{\alpha T}{h} \cdot 3a\right) \cdot \frac{3}{2}a$$

$$\hookrightarrow \quad u_B^{KT} = -\frac{15}{2} \alpha T \frac{a^2}{h} = -\frac{225}{2} \alpha T a = u_A$$

$$\square \quad \theta_B = \theta_A - A_{BC}^{KT} = 4\alpha T \frac{a}{h} - \frac{\alpha T}{h} \cdot 3a = \alpha T \frac{a}{h} = 15\alpha T$$

$$\square \quad \theta_A = \theta_B - A_{AB}^{KT} = \alpha T \frac{a}{h} - \frac{\alpha T}{h} \cdot 2a = -\alpha T \frac{a}{h} = -15\alpha T$$

