

Análisis del desempeño de un control PID de orden fraccional en un robot móvil diferencial

Ulises Vázquez^a, Jaime González-Sierra^{b,*}, Guillermo Fernández-Anaya^c, Eduardo Gamaliel Hernández-Martínez^d

^aTecnológico Nacional de México/I.T. La Laguna, Blvd. Revolución y Av. Instituto Tecnológico de La Laguna s/n, Primero de Cobián, Centro, C.P. 27000, Torreón, Coahuila, México.

^bUniversidad Politécnica de Pachuca, Carretera Ciudad Sahagún-Pachuca Km. 20, Ex-Hacienda de Santa Bárbara, C.P. 43830, Zempoala, Hidalgo, México.

^cDepartamento de Física y Matemáticas, Universidad Iberoamericana, Prolongación Paseo de la Reforma 880, Lomas de Santa Fe, Álvaro Obregón, C.P. 01219, Ciudad de México, México.

^dInstituto de Investigación Aplicada y Tecnología, Universidad Iberoamericana, Prolongación Paseo de la Reforma 880, Lomas de Santa Fe, Álvaro Obregón, C.P. 01219, Ciudad de México, México.

To cite this article: Vázquez, U., González-Sierra, J., Fernández-Anaya, G., Hernández-Martínez, E.G. 2022. Performance analysis of a PID fractional order control in a differential mobile robot. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 19, 74-83. <https://doi.org/10.4995/riai.2021.15036>

Resumen

Este trabajo aborda el problema de seguimiento de trayectorias de un robot móvil tipo diferencial considerando una extensión dinámica del modelo cinemático y, controlando un punto frontal situado a una cierta distancia perpendicular al eje medio de las ruedas. Se proponen dos tipos de controladores, un controlador PID de orden fraccionario ($PI^{\delta}D^{\mu}$) y un controlador PD fraccionario (PD^{μ}), ambos basados en errores de seguimiento. Los controladores propuestos se obtienen empleando la técnica de linealización entrada-salida. Por otra parte, los términos fraccionarios del controlador se basan en el operador de Caputo. Se presentan simulaciones numéricas con diferentes órdenes fraccionarios y se comparan con el controlador PID de orden entero, mostrando las variaciones ocurridas al cambiar únicamente el orden del controlador.

Palabras clave: Control fraccionario, robot diferencial, control de seguimiento, control PID.

Performance analysis of a PID fractional order control in a differential mobile robot

Abstract

This work deals with the tracking trajectory problem for a differential-drive mobile robot taking into account a dynamic extension from the kinematic model and, controlling a front point located at a certain distance perpendicular to the mid-axis of the wheels. Two controls are proposed, a PID fractional order controller ($PI^{\delta}D^{\mu}$) and a PD fractional order controller (PD^{μ}), both based on the tracking errors. The proposed controllers are obtained by means of the input-output linearization technique. On the other hand, the controller fractional terms are based on the Caputo's operator. Numerical simulations with different fractional orders are presented and compared with the integer order PID controller, showing the variations that occurred when changing only the controller order.

Keywords: Fractional control, differential-drive robot, tracking control, PID control.

1. Introducción

Un robot móvil se define como una máquina o dispositivo automático capaz de desplazarse en su entorno, es decir, sin es-

tar fijo en una ubicación física (Siegwart et al., 2011). Esta gran ventaja ha permitido el empleo de la robótica móvil en numerosas áreas de trabajo como minería, agricultura, vigilancia y la industria militar, por mencionar algunas. Los problemas clásicos

*Autor para correspondencia: jamesgsjr@hotmail.com
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

cos de control de la regulación y el seguimiento de trayectorias han sido ampliamente estudiados en el campo de la robótica móvil. Se ha realizado un análisis profundo para el caso de dos tipos de configuración, los llamados robots diferenciales y omnidireccionales, también conocidos como del tipo (2,0) y (3,0) respectivamente (Campion et al., 1996; Betourne and Campion, 1996).

El problema de control de un robot móvil con ruedas ha sido abordado desde diferentes perspectivas. En este sentido, para el caso de un robot móvil tipo omnidireccional (3,0) el problema de seguimiento de trayectorias es resuelto en (Vázquez and Velasco-Villa, 2008), donde se utiliza el modelo dinámico del robot y un controlador *PID*, donde también se prueba la estabilidad asintótica del sistema, (Ovalle et al., 2019) presenta el seguimiento robusto de un robot (3,0) de 4 ruedas utilizando técnicas por modos deslizantes de alto orden para conseguir el objetivo de control. De igual forma en (Sira-Ramírez et al., 2013) se realiza seguimiento robusto, en esta ocasión empleando un esquema de retroalimentación de salida robusto basado en un controlador lineal que estima los estados a través de un observador lineal. Asimismo (Kanjawanishkul and Zell, 2009) presenta el seguimiento usando control predictivo y el modelo cinemático del robot.

Para el caso del robot diferencial (2,0), en (Martínez et al., 2019) se presenta el seguimiento de trayectorias en robots tipo unicycle usando el método de elipsoide atractivo. En (Rodríguez-Cortes and Aranda-Bricaire, 2007) se muestra el seguimiento en un robot unicycle, donde se utiliza una extensión en el modelo cinemático de postura del mismo y un controlador que conmuta entre una parte para el arranque y otra para el seguimiento de la trayectoria; (Contreras et al., 2017) también presenta seguimiento de trayectorias en un modelo cinemático extendido. En (Park et al., 2008) y (Fierro and Lewis, 1998) se diseñan controladores para robots móviles con restricciones no holónomas usando redes neuronales, mientras que (Yang et al., 2015) propone un control no lineal de seguimiento de trayectorias y evasión de obstáculos.

Este trabajo emplea controladores de orden fraccionario para el seguimiento del robot diferencial, si bien ésta herramienta ya ha sido usada antes, en este tipo de robots se presentan diferencias con los trabajos publicados. Por ejemplo, tanto en (Rojas-Moreno and Perez-Valenzuela, 2017), como en (Zhang et al., 2020) se utilizan controladores PD^μ para el seguimiento de trayectorias en robots (2,0). En ellos se utilizan filtros para el cálculo de los términos fraccionarios, además se controla la dinámica de los motores de las ruedas del robot, por lo que se trabaja con las funciones de transferencia de los mismos y no con sus modelos cinemáticos o dinámicos. Por otra parte, en (Orman et al., 2016) proponen un controlador PI^δ para el seguimiento de velocidad lineal y orientación en un robot omnidireccional de 4 ruedas. Otras propuestas de controladores de orden fraccionario en robots móviles con ruedas son las de (Tawfik et al., 2014), (Al-Mayyahi et al., 2016) y (Rasheed and Al-Araji, 2017), en donde se utilizan controladores $PI^\delta D^\mu$ para conseguir el seguimiento de trayectorias, siendo el principal objetivo de estas publicaciones la optimización de las ganancias del controlador por distintos algoritmos genéticos. También en (Zhao et al., 2016) se diseña un Backstepping de orden fraccionario con el operador de Grünwald-Letnikov.

Es notorio que las estrategias planteadas bajo extensiones dinámicas del modelo del robot diferencial son menos comunes y que en ocasiones, éstas se presentan con complicaciones, como lo es la conmutación en el control, por ello, en este trabajo se propone utilizar una extensión del modelo cinemático del robot, donde en lugar de tener como objetivo de control el punto medio de las ruedas del mismo, se plantea la opción de controlar un punto frontal, desplazado una distancia ℓ . Con este cambio, se altera la forma de la matriz de transición del robot y con ello se evaden singularidades causadas por la velocidad lineal del robot y de esta manera el uso de un control conmutado es innecesario. Adicionalmente, el controlador fraccionario que aquí se plantea no utiliza filtros, sino el operador de Caputo para los cálculos de derivadas e integrales de orden fraccionario. Además, no se considera la regulación en bajo nivel de los motores de las ruedas para realizar el control, ni el seguimiento de referencias de velocidad lineal y orientación, en su lugar se utilizan errores de seguimiento en el plano y con esto se evitan incertidumbres en la identificación de funciones de transferencia.

El artículo está organizado de la siguiente manera: la Sección 2 presenta los preliminares matemáticos sobre operadores fraccionarios, en la Sección 3 se presenta el modelo cinemático de postura del robot y las variaciones consideradas. La Sección 4 muestra el diseño del controlador propuesto, posteriormente, la Sección 5 muestra los resultados obtenidos mediante simulaciones, y, finalmente, en la Sección 6 se mencionan las conclusiones de este trabajo.

2. Operadores de Orden Fraccionario

El cálculo de orden fraccionario (Miller and Ross, 1993) es una generalización del cálculo de orden entero a orden real. Para dicha generalización, la literatura presenta el uso de un operador, el cual puede denotarse por ${}_a D_t^\alpha$, donde a y t son los límites de la operación, mientras que α es el orden. Asimismo, la integración y diferenciación de orden fraccionario se definen de la siguiente manera:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t), & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \\ \int_a^t f(\tau) d\tau^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Existen numerosas definiciones matemáticas para describir tanto derivadas como integrales de orden fraccionario (Podlubny (1998), Miller and Ross (1993) y Valério and Costa (2013)). De entre estas múltiples definiciones, aquí se presentan dos de las que han sido mayormente utilizadas en el área de control. En primera instancia, se ilustra la definición de Riemann-Liouville, cuya integral de orden fraccionario está definida como

$${}^{RL}D_t^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2)$$

donde $0 < \alpha < 1$, a es el valor inicial y $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. Del mismo modo, la derivada está definida como

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \right], \quad (3)$$

donde $n - 1 < \alpha \leq n$.

Por su parte, el operador de Caputo es una definición alternativa a la de Riemann-Liouville, y está dada por

$${}^C D^\alpha f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - m + 1}} d\tau, \quad (4)$$

donde $m - 1 < \alpha < m$.

La integral por el operador de Riemann-Liouville queda descrita por

$${}_0^C D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1 - \alpha}} d\tau, \alpha > 0. \quad (5)$$

Cabe destacar que el operador de Caputo cuenta con condiciones iniciales que son físicamente interpretables, por ello, se utiliza preferentemente en sistemas físicos, sin embargo, bajo condiciones iniciales homogéneas, ambas definiciones son equivalentes, es decir,

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t - a)^{k - \alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(a), \quad (6)$$

para $f^{(k-a)}(a) = 0, (k = 0, 1, \dots, n - 1)$.

Debido a lo mencionado anteriormente, en lo subsecuente al utilizar la notación D^α , se estará haciendo referencia a la derivada utilizando el operador de Caputo.

3. Modelo Cinemático del Robot Diferencial

Considere el esquema de un robot diferencial mostrado en la Figura 1, donde sus entradas de control $[v \ \omega]^\top \in \mathbb{R}^2$ representan la velocidad lineal y angular, respectivamente. Por otro lado, el punto $[x \ y]^\top \in \mathbb{R}^2$ corresponde al punto medio del eje de las ruedas del robot y θ a su ángulo de orientación medido con respecto al eje horizontal X . Cabe resaltar que este es un sistema subactuado.

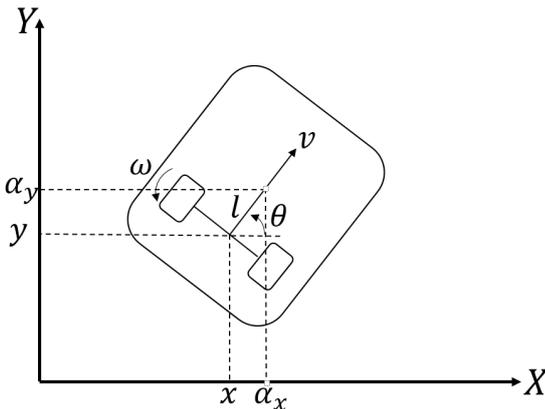


Figura 1: Diagrama del robot diferencial.

El modelo cinemático (Campion et al., 1996) correspondiente al robot diferencial está dado por

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad (7a)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta, \quad (7b)$$

$$\dot{\theta} = \omega. \quad (7c)$$

Es evidente que, para el modelo dado en (7) y, utilizando como salida el punto $[x \ y]^\top$, no es posible diseñar una estrategia de control por el método de linealización entrada-salida, debido a que se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \end{bmatrix}}_{A_1(\theta)} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (8)$$

donde la matriz de desacoplamiento $A_1(\theta)$ es singular. Debido a esto, se propone aumentar el orden del sistema y utilizar un modelo cinemático extendido (Rodríguez-Cortés and Aranda-Bricaire, 2007), dado por

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad (9a)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta, \quad (9b)$$

$$\dot{v} = u, \quad (9c)$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (9d)$$

donde u representa la aceleración lineal. Sin embargo, al utilizar el modelo presentado en (9) y, considerando nuevamente como salida del sistema al punto medio del eje de las ruedas, se obtiene el siguiente sistema de segundo orden

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A_2(\theta, v) \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix},$$

donde $A_2(\theta, v)$ es la matriz de desacoplamiento, dada por

$$A_2(\theta, v) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -v \sin \theta \\ \sin \theta & v \cos \theta \end{bmatrix},$$

la cual es no singular $\forall v \neq 0$. Esta restricción significa que para el diseño de una estrategia de control de linealización entrada-salida, la velocidad del robot debe ser diferente de cero. Por lo tanto, si el robot se encuentra estacionado, el controlador no podrá operar, por lo que es necesario diseñar un controlador adicional para el arranque y conmutar entre ambos controladores.

Es por esa razón que se plantea controlar, con el modelo cinemático dado en (7), un punto diferente al punto medio del eje de las ruedas, es decir, un punto $\alpha = [\alpha_x \ \alpha_y]^\top \in \mathbb{R}^2$ que se encuentra a una distancia ℓ , perpendicular al eje medio de las ruedas y cuyas coordenadas están dadas por

$$\alpha_x = x + \ell \cos \theta, \quad (10a)$$

$$\alpha_y = y + \ell \sin \theta. \quad (10b)$$

La dinámica de (10) está dada por

$$\dot{\alpha}_x = \dot{x} - \dot{\theta} \ell \sin \theta, \quad (11a)$$

$$\dot{\alpha}_y = \dot{y} + \dot{\theta} \ell \cos \theta. \quad (11b)$$

Sustituyendo (7) en (11), se tiene que

$$\dot{\alpha}_x = v \cos \theta - \omega \ell \sin \theta, \quad (12a)$$

$$\dot{\alpha}_y = v \sin \theta + \omega \ell \cos \theta. \quad (12b)$$

Al utilizar el procedimiento descrito en (Rodríguez-Cortés and Aranda-Bricaire, 2007), se procede a obtener un modelo cinemático extendido y de este manera imponer una dinámica de

segundo orden. En ese sentido, se definen las siguientes variables

$$\begin{aligned}\xi_1 &= v, & \xi_2 &= \omega, \\ \dot{\xi}_1 &= \dot{v} = \tilde{u}_1 & \dot{\xi}_2 &= \dot{\omega} = \tilde{u}_2,\end{aligned}$$

donde \tilde{u}_1 es la aceleración lineal y \tilde{u}_2 es la aceleración angular, siendo estas nuevas variables, las entradas de control. Por lo tanto, el sistema (12) se reescribe como

$$\dot{\alpha}_x = \xi_1 \cos \theta - \xi_2 \ell \sin \theta, \quad (13a)$$

$$\dot{\alpha}_y = \xi_1 \sin \theta + \xi_2 \ell \cos \theta. \quad (13b)$$

La dinámica del sistema (13) está dada por

$$\ddot{\alpha} = B(\theta, \xi_1, \xi_2) + A(\theta, \ell) \tilde{\mathbf{u}}, \quad (14)$$

donde $\alpha = [\alpha_x \quad \alpha_y]^\top$,

$$B(\theta, \xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} -\xi_1 \xi_2 \sin \theta - \xi_2^2 \ell \cos \theta \\ \xi_1 \xi_2 \cos \theta - \xi_2^2 \ell \sin \theta \end{bmatrix},$$

$$A(\theta, \ell) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\ell \sin \theta \\ \sin \theta & \ell \cos \theta \end{bmatrix},$$

y $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1 \quad \tilde{u}_2]^\top$. Es evidente que la matriz de desacoplamiento $A(\theta, \ell)$ es no singular $\forall \ell \neq 0$. Finalmente, el modelo presentado en (14) será utilizado para el diseño del controlador de seguimiento de trayectorias del robot diferencial que se presenta en la siguiente sección.

4. Estrategia de Control

Para lograr el seguimiento de trayectorias, se considera el modelo obtenido en (14), donde es importante mencionar que la extensión realizada en el modelo no es física, sino que ocurre de manera virtual a través del dispositivo de control.

Note que las matrices $A(\theta, \ell)$ y $B(\theta, \xi_1, \xi_2)$, contienen no linealidades debido a los términos seno y coseno. Para eliminar dichas no linealidades se propone una linealización por realimentación de estados (Khalil and Grizzle, 2002). En ese sentido, la estrategia de control está dada por

$$\tilde{\mathbf{u}} = A^{-1}(\theta, \ell) [\mathbf{u} - B(\theta, \xi_1, \xi_2)], \quad (15)$$

con $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ un control auxiliar. Al aplicar la ley de control (15) al sistema (14) se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\ddot{\alpha} = \mathbf{u}, \quad (16)$$

de modo que la dinámica del punto frontal $\alpha \in \mathbb{R}^2$ se comporta como un sistema de segundo orden. Definiendo los errores de seguimiento como

$$e_x = \alpha_x - x_d, \quad (17a)$$

$$e_y = \alpha_y - y_d, \quad (17b)$$

donde x_d y y_d corresponden a las coordenadas de la trayectoria a seguir en el plano $X - Y$. La dinámica de los errores de seguimiento (17) está dada por

$$\ddot{e}_x = \ddot{\alpha}_x - \ddot{x}_d, \quad (18a)$$

$$\ddot{e}_y = \ddot{\alpha}_y - \ddot{y}_d. \quad (18b)$$

Sustituyendo (16) en (18), de manera matricial se obtiene lo siguiente

$$\ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{q}}_d, \quad (19)$$

donde $\mathbf{e} = [e_x \quad e_y]^\top$ y $\mathbf{q}_d = [x_d \quad y_d]^\top$. De modo que ahora es posible definir el control auxiliar \mathbf{u} como

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_d - K_p \mathbf{e} - K_v D^\mu \mathbf{e} - K_i D^{-\delta} \mathbf{e}. \quad (20)$$

El control (20) corresponde a un controlador *PID* de orden fraccionario, donde $K_p, K_v, K_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ son matrices diagonales de ganancias, es decir, $K_p = \text{diag}\{k_{p1}, k_{p2}\}$, $K_v = \text{diag}\{k_{v1}, k_{v2}\}$, $K_i = \text{diag}\{k_{i1}, k_{i2}\}$; $\ddot{\mathbf{q}}_d$ es la compensación de las aceleraciones deseadas en el robot, mientras que D^μ y $D^{-\delta}$ corresponden a operadores fraccionarios para las acciones derivativa e integral en el controlador, respectivamente.

4.1. Análisis de Estabilidad

Comentario 4.1. Note que si la ganancia $K_i = \mathbf{0}_2$, con $\mathbf{0}_2$ una matriz de ceros de 2×2 , entonces, el control (20) se reduce a

$$\mathbf{u} = \ddot{\mathbf{q}}_d - K_p \mathbf{e} - K_v D^\mu \mathbf{e}. \quad (21)$$

Sustituyendo (21) en (19) se obtiene un sistema de segundo orden lineal e invariante en el tiempo. A partir de (Petráš, 2008), se ha demostrado que, en el caso de sistemas fraccionarios lineales e invariantes en el tiempo de orden conmensurado, es posible utilizar un método geométrico de análisis complejo basado en el principio de argumento de las raíces de la ecuación característica para el análisis de estabilidad en el sentido BIBO (Entrada acotada - salida acotada). La condición de estabilidad se enuncia en el siguiente Teorema.

Teorema 4.1. Un sistema de orden conmensurado descrito por una función de transferencia racional es estable, si y solo si

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall i$$

siendo λ_i la i -ésima raíz del denominador en el polinomio característico del sistema (Matignon, 1996), (Petráš and Dorcák, 1999) y α siendo el orden de la derivada.

Adicionalmente, en (Petráš, 2011) se establece que, al realizar el mapeo de los polos de un sistema de orden conmensurado en un plano complejo, dicho sistema será estable si todas sus raíces se encuentran en la región comprendida en alguno de los siguientes casos

1. Para $\alpha < 1$ la región de estabilidad se muestra en la Figura 2(a).
2. Para $\alpha = 1$ la región de estabilidad corresponde a la parte izquierda del plano s , (como el teorema de Routh-Hurwitz) mostrado en la Figura 2(b).
3. Para $\alpha > 1$ la región de estabilidad se muestra en la Figura 2(c).

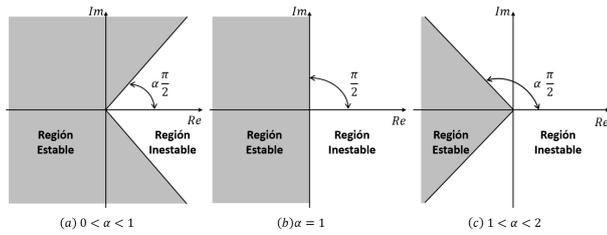


Figura 2: Regiones de estabilidad de un sistema de orden fraccionario (Petráš, 2011).

Proposición 4.1. Sea el sistema (19) en lazo cerrado con el control (21). Si las ganancias $K_p, K_v > 0$, el sistema será BIBO estable. Además, si se considera $\mu = 1$, entonces el controlador (21) será un control PD de orden entero.

Prueba 4.1. Considerando $\mu = 1$ y, sustituyendo el control (21) en el sistema (19) se tiene lo siguiente

$$\ddot{\mathbf{e}} = -K_p \mathbf{e} - K_v \dot{\mathbf{e}}. \quad (22)$$

Debido a que las matrices K_p y K_v son matrices diagonales, entonces los errores del sistema (22) están desacoplados, por lo tanto, es posible analizar la estabilidad del error e_x y e_y de manera separada. En ese sentido, se definen las siguientes variables de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= e_x, \\ x_2 &= \dot{e}_x, \end{aligned}$$

entonces, el sistema (22) expresado en espacio de estados está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{p1} & -k_{v1} \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Posteriormente, se procede a obtener los valores propios de la matriz K

$$\det(sI_2 - K) = s^2 + sk_{v1} + k_{p1}, \quad (23)$$

con $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matriz identidad. Por lo tanto, los valores propios de la matriz K coinciden con las raíces del polinomio obtenido en (23), dando como resultado lo siguiente

$$\lambda_i = -\frac{1}{2}k_{v1} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k_{v1}^2 - 4k_{p1}}, \quad i = 1, 2,$$

de tal manera que la ubicación en el plano complejo de dichas raíces determinarán la estabilidad del sistema, por lo que la región de estabilidad en la que se encuentra el sistema (ver Figura 2(b)) queda condicionada al orden que tome el controlador. Dado que en este trabajo se consideran únicamente valores de $\mu < 1$, una conclusión conservadora sería afirmar que el sistema será asintóticamente estable mientras $K_p, K_v > 0$, de acuerdo a la Figura 2(a).

□

Por otra parte, el análisis se puede extender considerando el Teorema 1 dado en (Buslowicz, 2012) y (Buslowicz, 2013), el cual se cita a continuación.

Teorema 4.2. (Buslowicz (2012), Buslowicz (2013)) Sea un sistema de orden fraccionario con la forma

$${}_0D_t^\mu \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad (24)$$

donde,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad {}_0D_t^\mu \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} {}_0D_t^{\mu_1} x_1(t) \\ \vdots \\ {}_0D_t^{\mu_n} x_n(t) \end{bmatrix},$$

entonces, el sistema (24) es asintóticamente estable si y sólo si

$$w(s) = \det H(s) \neq 0 \quad \text{para } \Re(s) \geq 0, \quad (25)$$

donde, $H(s) = sI - A$.

Por lo tanto, se puede analizar el sistema (19) con el control (21), obteniendo lo siguiente

$$\ddot{\mathbf{e}} = -K_p \mathbf{e} - K_{v0} D_t^\mu \mathbf{e}. \quad (26)$$

Al igual que en el caso anterior, debido a que las matrices K_p y K_v son matrices diagonales, entonces los errores del sistema (26) están desacoplados, por lo tanto, es posible analizar la estabilidad del error e_x y e_y de manera separada. En ese sentido, se definen las siguientes variables de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= e, \\ x_2 &= {}_0D_t^{\mu_1} x_1(t), \end{aligned}$$

por lo tanto, el sistema (26) expresado en pseudo espacio de estados está dado por

$$\begin{bmatrix} {}_0D_t^{\mu_1} x_1(t) \\ {}_0D_t^{\mu_2} x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{p1} & -k_{v1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Posteriormente, se obtiene $w(s) = \det H(s)$, por lo que, al seguir los procedimientos mostrados en (Buslowicz, 2013), y considerando que el orden de la derivada es igual, es decir, $\mu_1 = \mu_2$, se obtiene lo siguiente,

$$w(s) = \det \begin{bmatrix} s^{\mu_1} & -1 \\ k_{p1} & s^{\mu_1} + k_{v1} \end{bmatrix} = s^{2\mu_1} + k_{v1} s^{\mu_1} + k_{p1}, \quad (28)$$

y, al sustituir $\lambda = s^{\mu_1}$ resulta

$$w(s) = \lambda^2 + k_{v1} \lambda + k_{p1}. \quad (29)$$

Note que el determinante del sistema (28) es diferente de cero, por lo cual se cumple la condición mostrada en el Teorema 1 de (Buslowicz, 2012) y (Buslowicz, 2013). Más aún, en (Sabatier et al., 2010) se demuestra que si $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$ y la condición (25) se mantiene, entonces los componentes del vector $\mathbf{x}(t)$ decaerán a cero, no de forma exponencial, sino en concordancia con la función $t^{-\mu_1}$, $t > 0$, $\mu_1 > 0$ (Matignon, 1998). Entonces, tal y como se establece en (Buslowicz, 2013), la condición (25) es necesaria y suficiente para determinar la estabilidad asintótica del sistema.

Por otra parte, en el Teorema 2 de (Buslowicz, 2013) se da el procedimiento para determinar la estabilidad de un sistema fraccionario conmensurable, el cual, se cita a continuación.

Teorema 4.3. (Buslowicz, 2013) *Sea el sistema de orden fraccionario conmensurable (24), el cual, cumple con la siguiente condición*

$$\mu_i = k_i \eta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \quad (30)$$

con $\eta > 0$, \mathbb{Z}_+ es el conjunto de números enteros positivos, la cual establece que el orden de la derivada μ_i es un múltiplo de η , entonces, el sistema (24) es asintóticamente estable si y sólo si $\gamma > \eta \frac{\pi}{2}$, donde

$$\gamma = \min_i |\arg(\lambda_i)|, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (31)$$

Por lo tanto, al considerar el Teorema 2 de (Buslowicz, 2013), y, observando (29), sería necesario obtener las raíces de $w(s)$, las cuales, están dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k_{v1} \pm \sqrt{k_{v1}^2 - 4k_{p1}}}{2}. \quad (32)$$

A partir de (32), se seleccionan k_{v1} y k_{p1} de tal manera que las raíces de $w(s)$ sean reales y negativas, por lo tanto, el argumento de ambas es π , por lo que el sistema resulta asintóticamente estable para toda $\eta < 2$. Cabe destacar, que este resultado concuerda con el Lema 1 de (Buslowicz, 2013) y con el obtenido en (Radwan et al., 2009).

5. Simulaciones Numéricas

En esta Sección se presentan los resultados obtenidos al utilizar la ley de control (15) y (20) en el sistema (14). Las simulaciones se realizaron en *Matlab®-Simulink®* con el toolbox de *FOMCON* (Fractional Order Modelling and Control) (Tepljakov, 2017), (Tepljakov et al., 2013), utilizando un controlador $PI^\delta D^\mu$ y un PD^μ . En ambos casos se utilizaron distintos órdenes fraccionarios para observar los posibles cambios en el desempeño del controlador al modificar únicamente el orden del mismo. Además, se incluyó el caso de orden entero para efectos de comparación.

5.1. Controlador PD^μ

Para el primer caso de estudio, el sistema en lazo cerrado está dado por el control (20) con $K_i = 0$ y el sistema (19), obteniendo lo siguiente

$$\ddot{e} = -K_p e - K_v D^\mu e.$$

La trayectoria deseada está dada por

$$X_d = (A - B) \cos(\omega t) + \frac{B \cos(A\omega t - B\omega t)}{B}, \quad (33a)$$

$$Y_d = (A - B) \sin(\omega t) - \frac{B \sin(A\omega t - B\omega t)}{B}, \quad (33b)$$

donde $A = 5[m]$ y $B = 1[m]$ determinan el tamaño y la forma de la trayectoria, mientras que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ corresponde a la frecuencia angular de la trayectoria con $T = 30[s]$. Las condiciones iniciales están dadas por

$$\alpha_x(0) = 3[m],$$

$$\alpha_y(0) = -0.4[m],$$

las cuales se eligieron de tal manera que, al inicio de la simulación, el robot estuviera fuera de la trayectoria deseada, con el objetivo de observar su comportamiento al converger a la misma. Por otra parte, las ganancias del controlador están dadas por

$$K_p = \begin{bmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix},$$

las cuales se eligieron de tal manera que cumplan con (32). Los valores que pueden tomar las matrices de ganancias K_p y K_v están en función del orden del controlador. En este caso, se consideran valores de $\mu < 1$, por lo que el sistema será asintóticamente estable si $K_p, K_v > 0$.

Comentario 5.1. *Es importante señalar que la trayectoria dada en (33) presenta varios vértices y cambios abruptos lo que dificulta el seguimiento de la trayectoria por parte de un robot diferencial, además de tener una mayor complejidad en comparación con un círculo o alguna otra trayectoria suave. Sin embargo, cabe aclarar que si la trayectoria deseada es una trayectoria parametrizada y es al menos dos veces continuamente diferenciable, entonces, es posible utilizar la estrategia de control dada en (15) y (20), y, por lo tanto, el robot será capaz de seguir dicha trayectoria. En ese sentido, el desempeño del controlador se verá afectado por las dimensiones de las trayectorias a seguir, así como del período T , es decir, si el período T es menor, entonces el controlador generará velocidades mayores, con el objetivo de alcanzar la trayectoria deseada.*

Los resultados obtenidos bajo los parámetros establecidos se observan en las Figuras 3-6. Específicamente, la Figura 3 muestra el seguimiento de una hipocicloide de 5 puntas, donde es evidente que en todos los casos se converge a la trayectoria deseada. Sin embargo, para el caso del controlador fraccionario se presentan sobre impulsos, mismos que son más pronunciados conforme se reduce el orden de la parte derivativa. Los casos más notorios son los de orden $\mu = 0.4$ y $\mu = 0.3$, debido a que presentan oscilaciones alrededor de la trayectoria para alcanzar un estado estable una vez que se llega a la primer punta de la trayectoria.

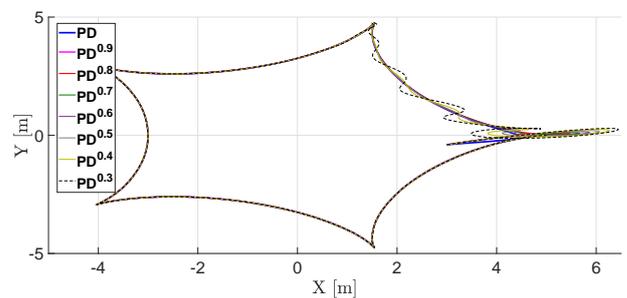


Figura 3: Seguimiento de la trayectoria en el plano X - Y.

En la Figura 4(a) se ilustran los errores de seguimiento en el eje X. Es posible observar los sobre impulsos anteriormente mencionados, mientras que al utilizar el controlador entero no se presenta dichos sobre impulsos. Sin embargo, el error de posición, correspondiente al control de orden entero, converge al estado estable después que los controladores de orden fraccionario, $\mu = 0.9$ y $\mu = 0.8$.

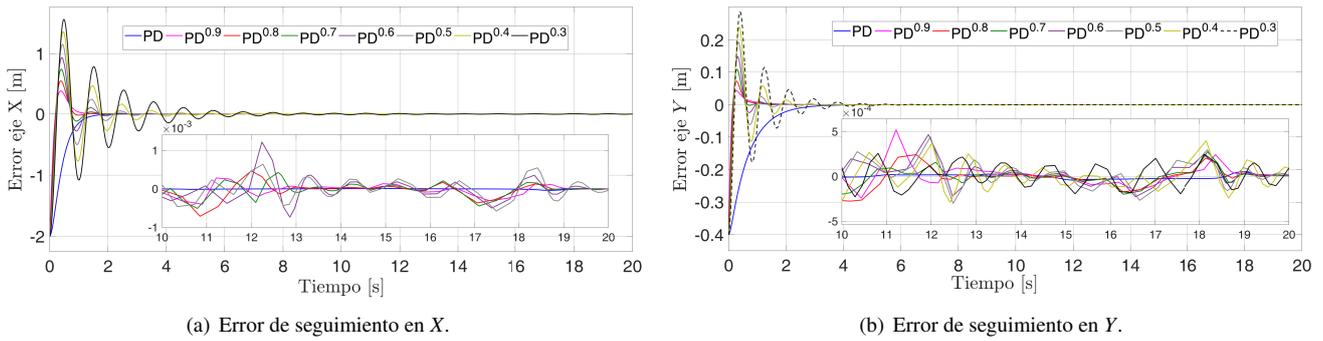


Figura 4: Errores de seguimiento.

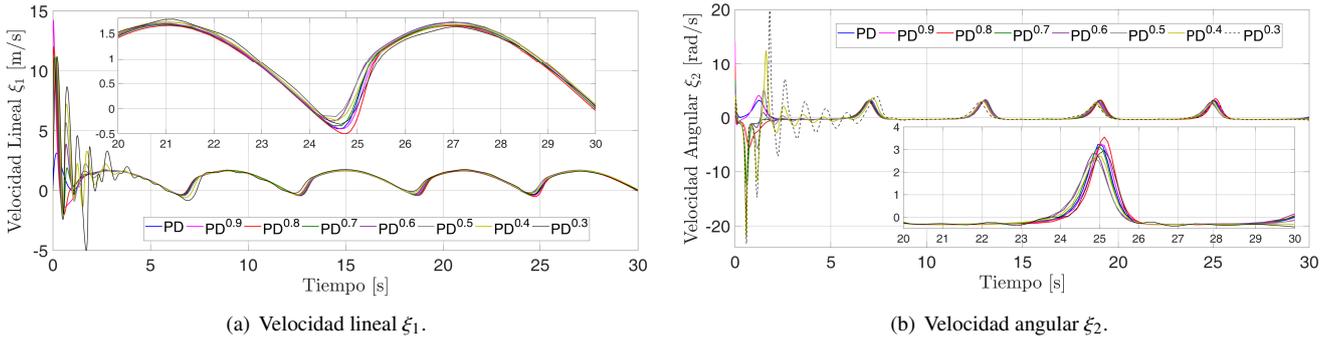


Figura 5: Velocidad lineal y angular.

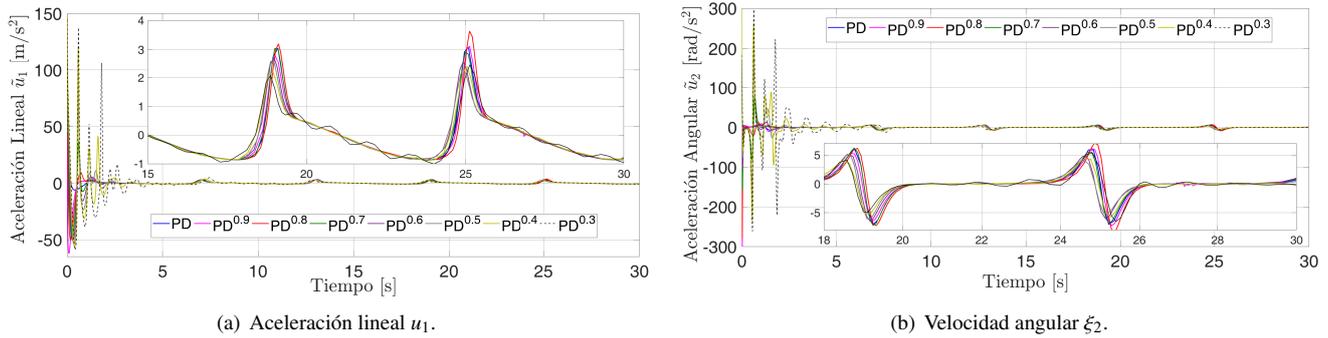


Figura 6: Aceleración angular u_2 .

De manera similar, la Figura 4(b) ilustra los errores de seguimiento en el eje Y. En este caso, es evidente que el tiempo de convergencia de los controladores de orden $\mu = 0.9$ y $\mu = 0.8$ es más rápida en comparación del controlador de orden entero. Además, los sobre impulsos tienen una menor amplitud en comparación con la Figura 4(a).

En la Figura 5(a) se muestra la velocidad lineal del robot. Note que al inicio de la simulación, la velocidad tiene una gran amplitud, esto se debe a que la posición inicial del robot está fuera de la trayectoria deseada. Concretamente, al utilizar el control de orden $\mu = 0.9$ la amplitud de la velocidad lineal es mayor en comparación de las demás señales, sin embargo, este control es el que converge más rápido a la velocidad lineal deseada. Después de 3 segundos, la mayoría de los controladores (a excepción del controlador con $\mu = 0.3$ y $\mu = 0.4$) logran alcanzar el mismo valor de velocidad. En ese mismo sentido, la Figura 5(b) ilustra la velocidad angular en donde es notorio que los controladores con convergencia más rápida al estado estable

son los que presentan mayores sobre impulsos.

Para el caso de las Figuras 6(a) y 6(b) se observan comportamientos que corresponden a lo mostrado en las gráficas de velocidad lineal y angular, sin embargo, en el caso de las aceleraciones, los sobre impulsos tienen amplitudes muy grandes. Con base en lo anterior descrito, se concluye que la mayor desventaja de los controladores fraccionarios corresponde a sobre impulsos de mayor amplitud. Una vez alcanzados los objetivos de control, las amplitudes de las señales son prácticamente iguales, variando de -1 [m/s²] a 5 [m/s²] en el caso de la aceleración lineal y de ± 6 [rad/s²] para la aceleración angular.

5.2. Controlador $PI^\delta D^\mu$

En el segundo caso de estudio, el sistema en lazo cerrado está dado por el control (20) y el sistema (19), obteniendo lo siguiente

$$\ddot{\mathbf{e}} = -K_p \mathbf{e} - K_v D^\mu \mathbf{e} - K_i D^{-\delta} \mathbf{e}.$$

La trayectoria deseada es idéntica a la presentada en el caso anterior así como las condiciones iniciales. Por su parte, las ganancias del controlador están dadas por

$$K_p = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad K_v = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Para este apartado se consideró un orden para la acción derivativa del controlador de 0.9, mientras que en la acción integral el orden varió de 0.3 a 0.9.

La Figura 7 muestra la trayectoria en el plano realizada por el robot. A diferencia del PD^μ , en este caso, los sobre impulsos que se presentan son de menor amplitud y es más notorio que el controlador de orden entero tarda más en alcanzar la trayectoria deseada. De manera general, es evidente que la adición de la acción integral en el controlador mejora en gran medida el resultado obtenido.

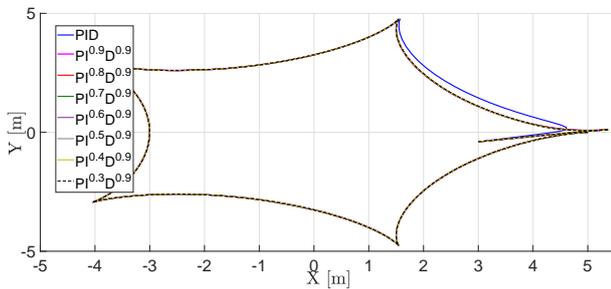


Figura 7: Seguimiento de la trayectoria en el plano $X - Y$.

El error de seguimiento en el eje X se presenta en la Figura 8(a) donde se aprecia que si hay sobre impulsos, sin embargo, éstos son menores que los obtenidos en la Figura 4(a). Incluso los casos en que la acción integral tiene el menor orden, el sobre impulso es apenas mayor que el de orden entero, en cambio, el controlador entero toma más del doble de tiempo en converger al valor deseado en X en comparación de los controladores fraccionarios, siendo el de menor orden $\delta = 0.3$ el que converge en menor tiempo a la trayectoria deseada. En el mismo sentido, la Figura 8(b) muestra los errores de seguimiento en el eje Y donde son notorias las reducciones en las amplitudes de los sobre impulsos así como una rápida convergencia la trayectoria deseada al utilizar el control de orden fraccionario.

La evolución de la velocidad lineal del robot, se ilustra en la Figura 9(a). Al inicio de la simulación, la velocidad lineal es aproximadamente 5 veces mayor al utilizar los controladores de orden fraccionario en comparación con el control de orden entero. A pesar de esta diferencia, antes de 5 segundos las velocidades lineales son las mismas en todos los casos. Por otra parte, la velocidad angular del robot se muestra en la Figura 9(b) donde el comportamiento es similar al presentado en la Figura 9(a).

Las Figuras 10(a) y 10(b) presentan las aceleraciones lineales y angulares, respectivamente. Al inicio de la simulación, se tienen amplitudes muy grandes para los casos fraccionarios. Sin embargo, una vez terminada la etapa del transitorio, las aceleraciones tienen comportamientos similares, es decir, la aceleración lineal se encuentra en una banda de $-1[\text{m/s}^2]$ a $5[\text{m/s}^2]$, mientras que la aceleración angular se encuentra entre $\pm 10[\text{rad/s}^2]$.

Finalmente, para efectos de comparación, la Figura 11 presenta el error rms de posición dado por la siguiente ecuación

$$e_{RMS}(t) = \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \|e(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $\Delta t = 2$ es una ventana de tiempo en la cual la señal es evaluada. Concretamente, en la Figura 11(a), se observa que, al utilizar los controladores $PD^{0.9}$ y $PD^{0.8}$, a pesar de tener un sobreimpulso, los errores de posición convergen en menor tiempo a cero en comparación con el control PD . Además, note que, al disminuir el orden de la derivada, se incrementan las oscilaciones en la señal de e_{RMS} . Por otra parte, en la Figura 11(b), al disminuir el orden de la parte integral, los errores de posición alcanzarán el estado estable en un tiempo similar al utilizar un control PID de orden entero. Además, es evidente que, al incrementar el orden de la parte integral, los errores de posición convergerán a cero en un tiempo mayor en comparación con el control PID .

5.3. Aspectos prácticos

Para la parte de experimentación en un sistema físico será necesario ajustar las ganancias del controlador de tal manera de que no se exija una velocidad lineal y/o angular mayor a la velocidad lineal y/o angular del robot. En consecuencia, se presentarían resultados diferentes a los mostrados, sin embargo, la tendencia de tener una mayor amplitud en la velocidad lineal y angular se mantendría en los controladores de orden fraccionario.

6. Conclusiones

En este trabajo se presenta una extensión al modelo cinemático de un robot diferencial con el objetivo de tener un modelo de segundo orden con salida del sistema un punto frontal situado a una distancia perpendicular al punto medio del eje de las ruedas. Posteriormente, se planteó utilizar controladores tipo $PI^\delta D^\mu$ y PD^μ y de esta manera modificar el orden de los controladores y determinar el mejor desempeño al realizar el seguimiento de trayectorias. La estabilidad del controlador PD^μ se analizó utilizando Teoremas de estabilidad de Matignon para Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo de orden fraccionario, mientras que en el caso del controlador $PI^\delta D^\mu$ se tiene un acercamiento más pragmático, donde el funcionamiento de este caso se evaluó analizando los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas. El planteamiento de este controlador es un aporte en el control de robots móviles con ruedas, ya que se enfatiza el uso de modelos cinemáticos o extensiones de éstos para conseguir el objetivo de control. Además se evita el uso de filtros o de operadores fraccionarios que no toman en cuenta la interpretación de las condiciones iniciales del robot.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la DINVP de la Universidad Iberoamericana.

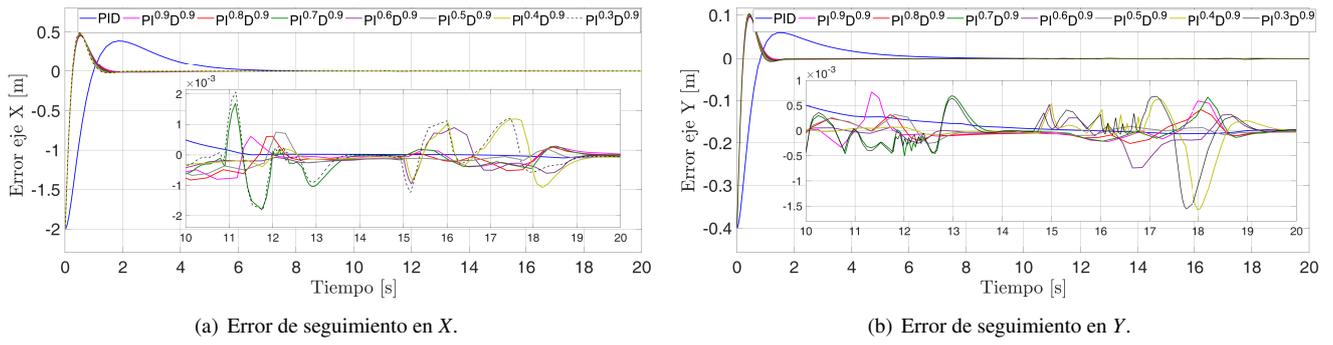


Figura 8: Errores de seguimiento.

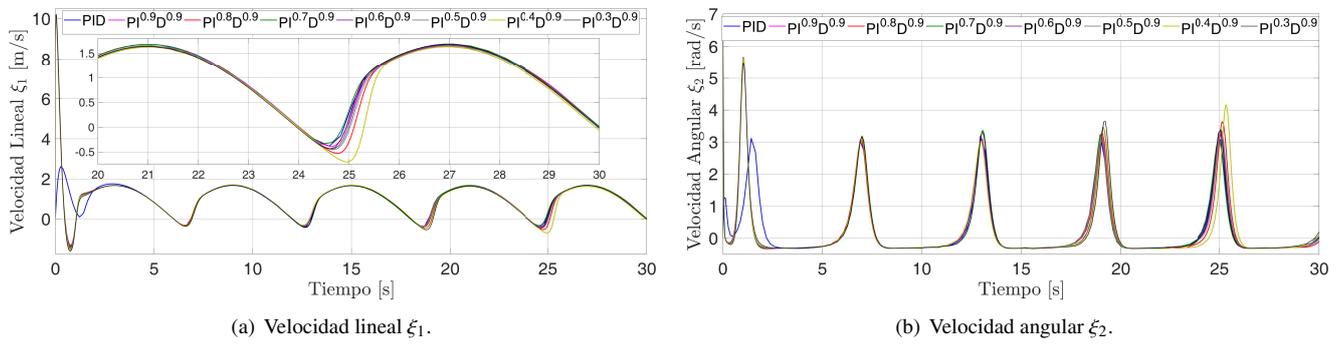


Figura 9: Velocidad lineal y angular.

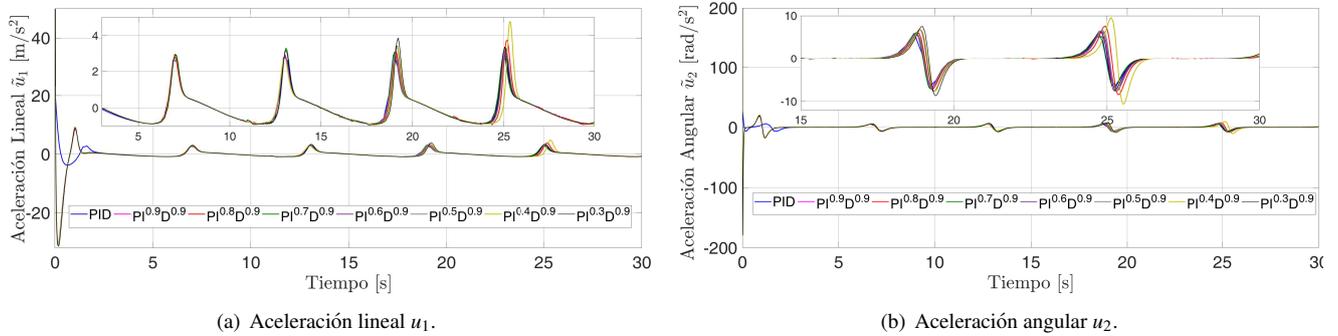


Figura 10: Aceleración lineal y angular.

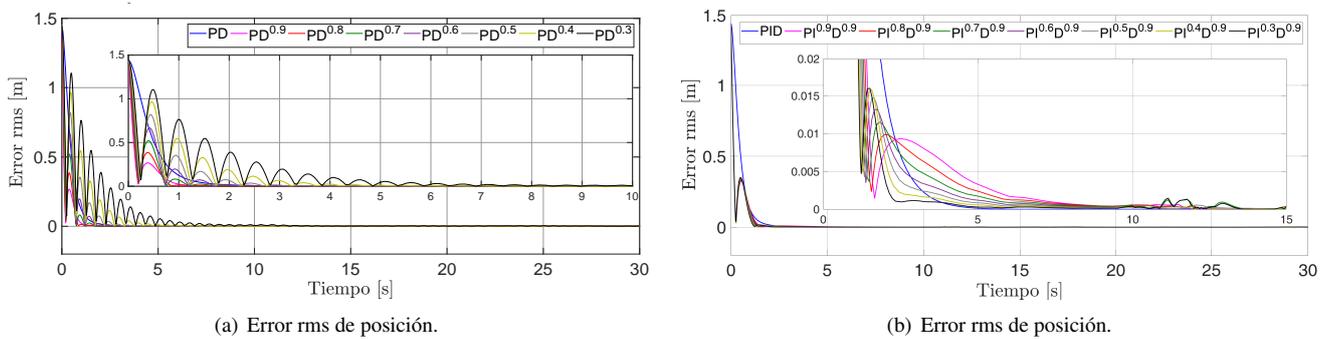


Figura 11: Error rms de posición para el control PD^μ y $PI^\alpha D^\beta \mu$.

Referencias

- Al-Mayyahi, A., Wang, W., Birch, P., 2016. Design of fractional-order controller for trajectory tracking control of a non-holonomic autonomous ground vehicle. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* 27 (1), 29–42.
- Betourne, A., Campion, G., 1996. Dynamic modelling and control design of a class of omnidirectional mobile robots. In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation* 3, 2810–2815.
- Buslowicz, M., 2012. Stability analysis of continuous-time linear systems consisting of n subsystems with different fractional orders. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences* 60 (2), 279–284.
- Buslowicz, M., 2013. Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time state-space systems with double fractional orders. In *Advances in the Theory and Applications of Non-integer Order Systems*, Springer, Heidelberg, 31–39.
- Campion, G., Bastin, G., Dandrea-Novell, B., 1996. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE transactions on robotics and automation* 12 (1), 47–62.
- Contreras, J., Herrera, D., Toibero, J., Carelli, R., 2017. Controllers design for differential drive mobile robots based on extended kinematic modeling. In *2017 European Conference on Mobile Robots*, 1–6.
- Fierro, R., Lewis, F., 1998. Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. *IEEE transactions on neural networks* 9 (4), 589–600.
- Kanjanawanishkul, K., Zell, A., 2009. Path following for an omnidirectional mobile robot based on model predictive control. In *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3341–3346.
- Khalil, H., Grizzle, J., 2002. *Nonlinear systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall 3.
- Martínez, E., Ríos, H., Mera, M., González-Sierra, J., 2019. A robust tracking control for unicycle mobile robots: An attractive ellipsoid approach. In *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 5799–5804.
- Matignon, D., 1996. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *IMACS Multiconference on Computational engineering in systems applications* 2 (1), 963–968.
- Matignon, D., 1998. Stability properties for generalized fractional differential systems. In *ESAIM: Proceedings* 5, 145–158.
- Miller, K., Ross, B., 1993. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*.
- Orman, K., Basci, A., Derdiyok, A., 2016. Speed and direction angle control of four wheel drive skid-steered mobile robot by using fractional order pi controller. *Elektronika ir Elektrotechnika* 22 (5), 14–19.
- Ovalle, L., Ríos, H., Llama, M., Dzul, V. S. A., 2019. Omnidirectional mobile robot robust tracking: Sliding-mode output-based control approaches. *Control Engineering Practice* 85, 50–58.
- Park, B., Yoo, S., Park, J., Choi, Y., 2008. Adaptive neural sliding mode control of nonholonomic wheeled mobile robots with model uncertainty. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 17 (1), 207–214.
- Petráš, I., 2008. Stability of fractional-order systems with rational orders. *Fractional Calculus and Applied Sciences* 10.
- Petráš, I., 2011. Fractional-order nonlinear systems: Modeling, analysis and simulation. *Nonlinear Physical Science Book Series*, Springer.
- Petráš, I., Dorcák, L., 1999. The frequency method for stability investigation of fractional control systems. *J. of SACTA* 2 (1-2), 75–85.
- Podlubny, I., 1998. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 340.
- Radwan, A., Soliman, A., Elwakil, A., Sedeek, A., 2009. On the stability of linear systems with fractional-order elements. *Chaos, Solitons & Fractals* 40 (5), 2317–2328.
- Rasheed, L., Al-Araji, A., 2017. A cognitive nonlinear fractional order pid neural controller design for wheeled mobile robot based on bacterial foraging optimization algorithm. *Engineering and Technology Journal* 35 (3), 289–300.
- Rodriguez-Cortes, H., Aranda-Bricaire, E., 2007. Observer based trajectory tracking for a wheeled mobile robot. In *2007 American Conference Control*, 991–996.
- Rojas-Moreno, A., Perez-Valenzuela, G., 2017. Fractional order tracking control of a wheeled mobile robot. *IEEE XXIV International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing*, 1–4.
- Sabatier, J., Moze, M., Farges, C., 2010. Lmi stability conditions for fractional order systems. *Computers & Mathematics with Applications* 59 (5), 1594–1609.
- Siegwart, R., Nourbakhsh, I., Scaramuzza, D., 2011. *Introduction to autonomous mobile robots*. MIT press.
- Sira-Ramírez, H., López-Urbe, C., Velasco-Villa, M., 2013. Linear observer-based active disturbance rejection control of the omnidirectional mobile robot. *Asian Journal of Control* 15 (1), 51–63.
- Tawfik, M., Abdulwahb, E., Swadi, S., 2014. Trajectory tracking control for a wheeled mobile robot using fractional order pi controller. *Al-Khwarizmi Engineering Journal* 10 (3), 39–52.
- Tepljakov, A., 2017. Fractional-order modeling and control of dynamic systems; fomcon: Fractional-order modeling and control toolbox. Springer Theses, 107–129.
DOI: 10.1007/978-3-319-52950-9_6
- Tepljakov, A., Petlenkov, E., Belikov, J., Finajev, J., 2013. Fractional-order controller design and digital implementation using fomcon toolbox for matlab. *IEEE Conference on Computer Aided Control System Design*, 340–345.
DOI: 10.1109/CACSD.2013.6663486
- Valério, D., Costa, J. D., 2013. An introduction to fractional control. *IET* 91, 32–208.
- Vázquez, J., Velasco-Villa, M., 2008. Path-tracking dynamic model based control of an omnidirectional mobile robot. *IFAC Proceedings Volumes* 41 (2), 5365–5370.
- Yang, H., Fan, X., Shi, P., Hua, C., 2015. Nonlinear control for tracking and obstacle avoidance of a wheeled mobile robot with nonholonomic constraint. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24 (2), 741–746.
- Zhang, L., Liu, L., Zhang, S., 2020. Design, implementation, and validation of robust fractional-order pd controller for wheeled mobile robot trajectory tracking. *Complexity* 2020, 1–12.
DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/9523549>
- Zhao, Y., Chen, N., Tai, Y., 2016. Trajectory tracking control of wheeled mobile robot based on fractional order backstepping. In *2016 Chinese Control and Decision Conference*, 6730–6734.