

## Sistema de control de posición mediante rechazo activo de perturbaciones para sistemas ópticos láser

José Fermi Guerrero-Castellanos<sup>a, \*</sup>, L. L. González-Romeo<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Cd Universitaria, 72570, Puebla, México.

**To cite this article:** Guerrero-Castellanos, J.F., González-Romeo, L.L. 2022. Position control system via active disturbance rejection for laser optical systems. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 19, 61-73. <https://doi.org/10.4995/riai.2021.14852>

### Resumen

En este trabajo se presenta de manera pragmática un esquema de control por rechazo activo de perturbaciones para un sistema de direccionamiento y estabilización de haz láser. Primeramente se diseña un Observador Lineal de Estado Extendido, el cual permite estimar las perturbaciones externas e incertidumbres en el modelo, así como la velocidad de desplazamiento transversal del haz. Posteriormente, se propone una ley de control, la cual contiene términos de retroalimentación y precompensación, permitiendo realizar tareas de regulación y seguimiento. Mediante un análisis de estabilidad en el sentido entrada a estado, se muestra que el sistema en lazo cerrado, planta-observador-controlador, es robustamente estable, cuando la entrada es la perturbación total y el estado es el error de posición del haz. Dicho análisis presenta nuevas perspectivas en una técnica ahora madura. Los resultados experimentales muestran el funcionamiento del esquema de control y mediante la norma  $L_2$  y la Integral del Error Cuadrático se mide el desempeño en lazo cerrado, el cual es comparado con tres controles generalmente usados en este tipo de sistemas: PID, control por retroalimentación de estados con observador y regulador lineal cuadrático gaussiano.

*Palabras clave:* Sistema de estabilización de haz láser, control por rechazo activo a perturbaciones, observador lineal de estado extendido, estabilidad entrada a estado (ISS).

### Position control system via active disturbance rejection for laser optical systems.

#### Abstract

In this work, an active disturbance rejection control scheme for a laser beam stabilization system is presented in a pragmatic way. First, a linear extended state observer is designed, which allows estimating external disturbances, non-model dynamics, and the transverse displacement speed of the beam. Subsequently, a control law is proposed for regulation and tracking tasks. The stability analysis in the input-to-state-stability framework shows that the closed-loop system, plant-observer-controller is stable when the total disturbance is viewed as the input, and the state is the beam position error. This analysis presents new perspectives to a now-classic result. The experimental results show the performance of the control scheme. Using the  $L_2$  norm and the Integral of the squared error, the closed-loop performance is evaluated and compared with three controls generally used in this type of systems: PID, observer-based state feedback, and linear quadratic gaussian regulator.

*Keywords:* Laser beam stabilization system, active disturbance rejection control, linear extended state observer, input-to-state stability (ISS).

## 1. Introducción

Los sistemas de control para el posicionamiento y estabilización de haz láser LBS (por sus siglas en inglés, Laser Beam Stabilization) son usados en diferentes sistemas tecnológicos en donde una gran precisión y robustez es requerida. Algunos ejemplos de estas aplicaciones son los cortadores láser en diferentes sistemas de manufactura, la cirugía robótica, comunicaciones ópticas, aplicaciones de astronomía, el escaneo de códigos de barras, entre otros (Quanser, 2010; Martínez et al., 2009; Alizadegan et al., 2018; Deng et al., 2020). Las técnicas de control para el posicionamiento del haz láser son la clave en muchos de los sistemas de óptica adaptable. El problema de control para el posicionamiento y direccionamiento del haz láser, consiste en lograr la regulación de la posición del haz o el seguimiento de una trayectoria, lo cual es establecido por el usuario. Sin embargo, la exactitud del posicionamiento del haz láser es afectado por perturbaciones externas, con componentes de media y baja frecuencia, provocadas principalmente por el movimiento o las vibraciones presentes en la plataforma donde se instala (Kim et al., 2004; Deng et al., 2020). En los sistemas optomecatrónicos, como el utilizado en la presente investigación, se utiliza un espejo activo con el objetivo de lograr el rechazo a las perturbaciones y posicionar de manera precisa el haz láser en la posición deseada, ver Figura 1. Así entonces, midiendo un pequeño porcentaje del haz, dicho espejo es capaz de estabilizar el movimiento del haz mediante la retroalimentación de la información de posición (Quanser, 2010; Landolsi et al., 2011). En los últimos años, se han diseñado y evaluado diversos enfoques de control para tales sistemas, por ejemplo, control adaptativo (Kim et al., 2004), (Pérez-Arancibia et al., 2006), método de ponderación de frecuencia (Pérez-Arancibia et al., 2009), controladores basados en PID (Landolsi et al., 2011), control PID de orden fraccionario (Al-Alwan et al., 2017), enfoques  $H_\infty$  (Martínez et al., 2009), (Alizadegan et al., 2018), control resonante integral (Yue and Song, 2015); entre otros.

En diversas aplicaciones de gran precisión como la reportada en este trabajo, el acoplamiento mecánico, las fluctuaciones de voltaje y corriente de la fuente de energía que alimenta el actuador, y las inevitables incertidumbres paramétricas, dificultan garantizar la robustez en el control de posición y de velocidad del servo sistema (Baronti et al., 2009; Tran and Hwang, 2020). En ese sentido, el esquema de control por rechazo activo de perturbaciones ADRC (de sus siglas en inglés, Active Disturbance Rejection Control) introducido por (Han, 2009) es muy atractivo, ya que se basa en la capacidad de estimar en línea, vía un observador de estado extendido ESO (por sus siglas en inglés, Extended State Observer), la parte de la dinámica desconocida del sistema a controlar, así como todos los efectos externos adversos, para posteriormente cancelarlos mediante una apropiada ley de control, (Sira-Ramírez et al., 2015, 2017). La metodología ADRC ha sido utilizada ampliamente en varias áreas tales como el diseño de convertidores CC en (Sira-Ramírez et al., 2016), generación eléctrica a base de fuentes energías renovables, (Hernández-Méndez et al., 2017), robótica de asistencia (Guerrero-Castellanos et al., 2018), control de bioprocesos

(Carreno-Zagarra et al., 2019) y recientemente en sistemas LBS (Deng et al., 2020) donde el diseño es abordado en el dominio de la frecuencia.

El uso de la técnica de ADRC en un sistema LBS resulta muy atractivo debido a las características y al entorno en que dicho sistema opera. Además, en sistemas LBS, como el abordado en este trabajo, no se tiene acceso a la medición directa de la velocidad, por lo que ésta debe ser estimada en línea para entonces ser usada en el algoritmo de control. De esta manera, la técnica de ADRC va a resultar en su conjunto una herramienta de mucha utilidad para el control de posición y trayectoria del haz láser en múltiples aplicaciones como las antes mencionadas. Además, servirá de marco de referencia para desarrolladores de sistemas optomecatrónicos, plataformas educativas, equipos médicos, etc. Si bien hoy en día el ADRC es una técnica madura y bien conocida, el presente trabajo tiene la intención de proponer y unificar algunos conceptos. La propuesta se sustenta en el análisis de estabilidad entrada a estado, ISS (del inglés Input-to-State-Stability) (Sontag and Wang, 1995; Sontag, 2008) permitiendo establecer una especie de principio de separación en el diseño del ADRC; cuestión intuitiva y mostrada parcialmente (Sira-Ramírez et al., 2017), pero no antes establecida formalmente en términos de ISS. El estudio realizado indica que el ESO puede ser diseñado, por una parte, garantizando que la dinámica del error de observación es ISS, es decir, el error converge a una esfera centrada en el origen del espacio de estados del error y donde el radio de la esfera es función del supremo de la señal de perturbación total y de los parámetros de sintonización del diseño del observador. Por otra parte, la ley de control puede ser diseñada independientemente, incorporando de manera natural la perturbación y el estado estimado. Entonces, un control de seguimiento de trayectoria puede realizarse garantizando que el sistema en lazo cerrado perturbado sea ISS. Finalmente, una vez diseñados el control y el observador, y debido a las propiedades de sistemas ISS en cascada, es posible garantizar que la dinámica del error del sistema en lazo cerrado (control-observador-planta perturbada e incierta) es ISS, es decir, el sistema en lazo cerrado es robustamente estable (Sontag, 2008). Adicionalmente, en este trabajo se presenta una interpretación en el dominio de la frecuencia del análisis ISS, encontrando una fuerte conexión con un resultado antes establecido para los controladores GPI (Generalized Proportional Integral Control), ver (Sira-Ramírez et al. (2017) y referencias en el trabajo.

El resto del artículo se encuentra organizado de la siguiente manera. La Sección 2 contiene los preliminares matemáticos del observador de estado extendido, específicamente del tipo lineal, así como lo referente a la propiedad ISS. En la Sección 3 se describe la plataforma experimental utilizada en este trabajo, su principio de funcionamiento y el modelo dinámico generalmente usado para el diseño de los controladores. El diseño del ADRC, así como el análisis de estabilidad se presentan en la Sección 4. La Sección 5 muestra los resultados experimentales, donde se realiza una comparación con tres controladores, a saber, PID, retroalimentación de estados con observador y lineal cuadrático gaussiano. Finalmente, en la Sección 6 se brindan las conclusiones.

## 2. Preliminares matemáticos

### 2.1. Observador de Estados Extendido Lineal (LESO)

Considere el siguiente sistema no lineal afín:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), x_2(0) = x_{20}, \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) + d(t) + u(t), x_n(0) = x_{n0}, \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida,  $f \in \mathbb{R}$  una función del sistema posiblemente desconocida, y  $d \in \mathbb{R}$  la perturbación externa;  $x_{n+1}(t) = f(t, \cdot) + d(t)$  es la “perturbación total” o “estado extendido” y  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  es el estado inicial (Guo and Zhao, 2016). Una aproximación para la estimación de (1) es el siguiente LESO:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) + l_1 (y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3(t) + l_2 (y(t) - \hat{x}_1(t)), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \hat{x}_{n+1}(t) + l_n (y(t) - \hat{x}_1(t)) + u(t) \\ \dot{\hat{x}}_{n+1}(t) = l_{n+1} (y(t) - \hat{x}_1(t)) \end{cases} \quad (2)$$

donde  $l_i, i = 1, 2, \dots, n + 1$  son parámetros de sintonización del estimador, (Guo and Zhao, 2016), (Freidovich and Khalil, 2008).

### 2.2. Estabilidad Entrada a Estado ISS

En lo que sigue,  $\|\cdot\|$  denota la norma Euclidiana para vectores y la norma-2 inducida para matrices, respectivamente. Una función escalar continua  $\gamma(r)$  definida para  $r \in [0, a]$  se dice que pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\gamma(0) = 0$ , y se dice que pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$  si está definida para todo  $r \geq 0$  y  $\gamma(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Una función escalar continua  $\beta(r, s)$  definida para todo  $r \in [0, a]$ ,  $s \in [0, \infty]$  se dice que pertenece a la clase  $\mathcal{KL}$  si para cada  $s$  fija, esta pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  y para cada  $r$  fija esta es decreciente en  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Un sistema dinámico con estado  $x$  y entrada  $d$  es llamado estable en el sentido entrada a estado, si existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  y una función  $\gamma$  de clase  $\mathcal{K}$  tales que  $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma(\|d_{[0,t]}\|_\infty)$  para todo  $t \geq 0$ . Para una señal  $d$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  denota la norma  $\mathcal{L}_\infty$  :  $\|d_{[0,s]}\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq s} \|d(t)\|$  (Sontag and Wang, 1995).

**Definición 2.1** (Sontag and Wang, 1995). Una función suave  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es llamada una función de Lyapunov ISS para el sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  si existen funciones  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , de tipo  $\mathcal{K}_\infty$ , y una función  $\chi$  de tipo  $\mathcal{K}$ , tales que

$$\alpha_1(\|x(t)\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x(t)\|) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

y

$$\|x(t)\| \geq \chi(\|u(t)\|) \Rightarrow \nabla V(x) \cdot f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x(t)\|) \quad (4)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.1** (Sontag and Wang, 1995). Las siguientes propiedades son equivalentes para cualquier sistema:

1. Es ISS.
2. Admite una función ISS de Lyapunov.
3. Es robustamente estable.

## 3. Plataforma experimental

En esta sección se realiza una descripción de la plataforma experimental del sistema LBS que es abordado en este trabajo, así como del modelo matemático del solenoide rotacional encargado de direccionar el haz láser.

### 3.1. Principio de funcionamiento del LBS

Los sistemas LBS cuentan con un principio de operación relativamente sencillo, compuesto por 3 elementos fundamentales, la fuente del haz láser, un espejo de direccionamiento rápido o FSM (por sus siglas en inglés, Fast Steering Mirror), y el detector sensible a la posición o PSD (por sus siglas en inglés, Position Sensitive Detector). Primeramente el láser se dirige al FSM, el cual se controla por un solenoide rotacional generando un desplazamiento angular en torno a un eje de rotación. El haz láser es reflejado del FSM y dirigido al divisor de haz, donde la mayor parte del haz se dirige al objetivo para el que se destine el experimento y una fracción de este se dirige al PSD. La desviación del haz de luz del punto objetivo se mide mediante el PSD, para así reajustar la posición del FSM mediante el control del solenoide, hasta garantizar que el reflejo del haz coincida con la posición o trayectoria deseada (Pérez-Arancibia et al., 2009).

En este trabajo, se utiliza un sistema experimental desarrollado por la empresa Quanser (Quanser, 2010). En este sistema el FSM se encuentra colocado sobre una plataforma móvil de un grado de libertad, permitiendo movimientos lineales. Dicha plataforma tiene también montado un motor de corriente continua (CC), el cual lleva acoplada una carga asimétrica con el objetivo de generar vibraciones. La plataforma está unida a un resorte. Entonces, en el caso que el motor de CC es alimentado con una tensión (máximo 5V) y debido a la carga asimétrica que lleva acoplada, se genera una vibración que origina el movimiento lineal de la plataforma debido al movimiento irregular de la carga y la fuerza de restauración generada por el resorte. Esta perturbación afecta directamente la posición del FSM y emula las perturbaciones externas a las que cualquier sistema LBS montado en plataformas móviles estaría sujeto. Note que la perturbación varía en amplitud y frecuencia respecto al tiempo, pero en general es desconocida. Así entonces, el problema de control para el posicionamiento y direccionamiento del haz láser, consiste en lograr la regulación de la posición del haz o el seguimiento de una trayectoria, lo cual es establecido por el usuario. Sin embargo, la exactitud del posicionamiento del haz láser se afecta por las perturbaciones externas antes descritas y las cuales contienen componentes de media y baja frecuencia. El principio de funcionamiento se muestra en la Figura 1.

La plataforma experimental del LBS está compuesta por un conjunto de elementos que se muestran en la Figura 2 y cuyos componentes se describen en la Tabla 1. Cabe señalar que la posición en tiempo real del haz láser es interpretada por parte del usuario en milímetros, al emplearse un programa desarrollado en MATLAB/Simulink en conjunto con el software de control en tiempo real QUARCT M, los cuales permiten comunicar una computadora con el sistema LBS mediante una tarjeta de adquisición de datos QPIDE (Quanser, 2021). A través de dicha tarjeta se recibe la posición en tiempo real del haz láser y se envía la señal de voltaje que controla el movimiento del solenoide, el cual a su vez ajusta la posición angular del FSM y en consecuencia, la desviación del haz láser que se refleja en el PSD. La Figura 4 muestra el diagrama de bloques y la interrelación de cada uno de los componentes del sistema LBS y las señales involucradas.

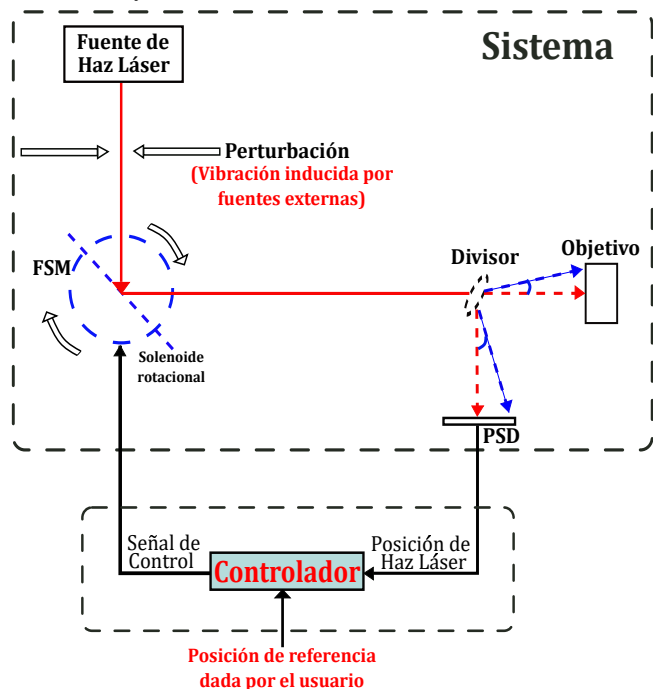


Figura 1: Principio de funcionamiento del sistema LBS.

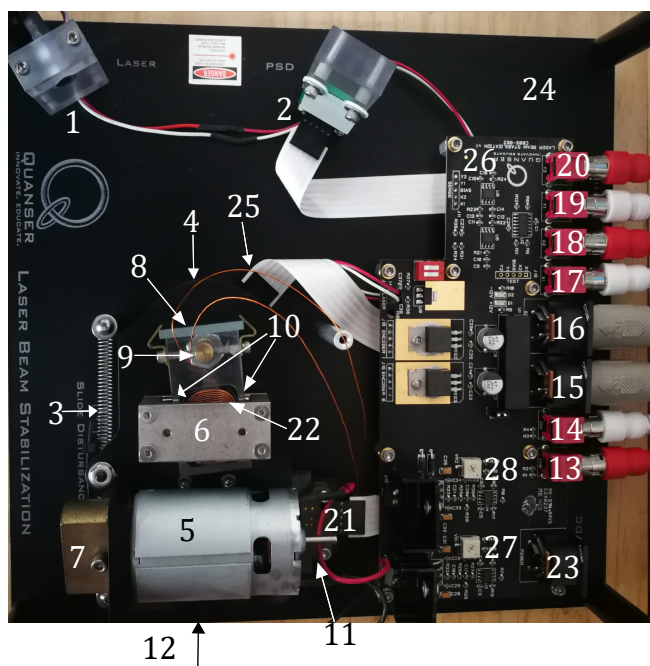


Figura 2: Vista superior del sistema LBS.

### 3.2. Modelo matemático del sistema

Como se mencionó en el epígrafe precedente, el sistema en cuestión consiste en un sistema electromecánico (solenoido rotacional) acoplado al FSM, el cual al aplicársele una tensión de corriente directa provoca que el espejo modifique su posición angular. El solenoide, el FSM y el PSD conforman un servosistema cuya función de transferencia está dada por:

$$P(s) = \frac{K}{\tau s^2 + s}, \tag{5}$$

donde  $K$  y  $\tau$ , representan la ganancia en lazo abierto y la constante de tiempo, respectivamente. La salida es la posición del haz láser en el PSD y la entrada representa la señal de control que provocará la modificación de la posición angular del espejo. Sin embargo, debido a las vibraciones de la plataforma móvil donde el espejo está montado, la posición angular del espejo se modifica provocando la desviación de la posición del haz láser en el PSD. Estas vibraciones representan perturbaciones externas aditivas a la señal de control. La Figura 3 muestra un diagrama de bloques representando el proceso.

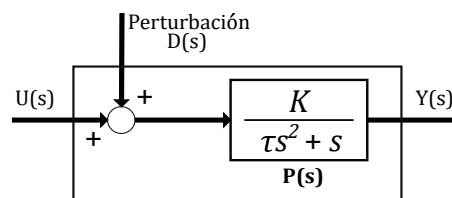


Figura 3: Diagrama simplificado del sistema en lazo abierto.

Se define la variable de estado que representa la posición y la velocidad como  $x = (x_1, x_2)$  con  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ . Además, definiendo  $a = 1/\tau$  y  $b = K/\tau$ , el modelo en espacio de estados del sistema representado en la Figura 3 está dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -ax_2(t) + bu(t) + bd(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{6}$$

En la práctica, la velocidad  $x_2$  no es medible, por lo que debe ser estimada si se desea conocer dicha información para la retroalimentación. Por su parte, el término  $d(t)$  representa la perturbación externa dependiente del tiempo y sin una estructura particular. Con el fin de simplificar el diseño del control, se considerará una perturbación total variante en el tiempo que combina el efecto del término dependiente del estado (perturbación endógena) y la perturbación externa (exógena), obteniendo de esa manera el siguiente ultramodelo (Sira-Ramírez et al., 2015)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = bu(t) + \xi(t) \end{cases} \tag{7}$$

donde  $\xi(t) = -ax_2(t) + bd(t)$  representa la perturbación total del sistema, la cual se estimará mediante un observador de estado extendido y se compensará (rechazará) mediante el control. En lo que sigue y con el fin de aligerar las notaciones, se omitirá el empleo de la variable  $t$ , al menos que el contexto lo exija.

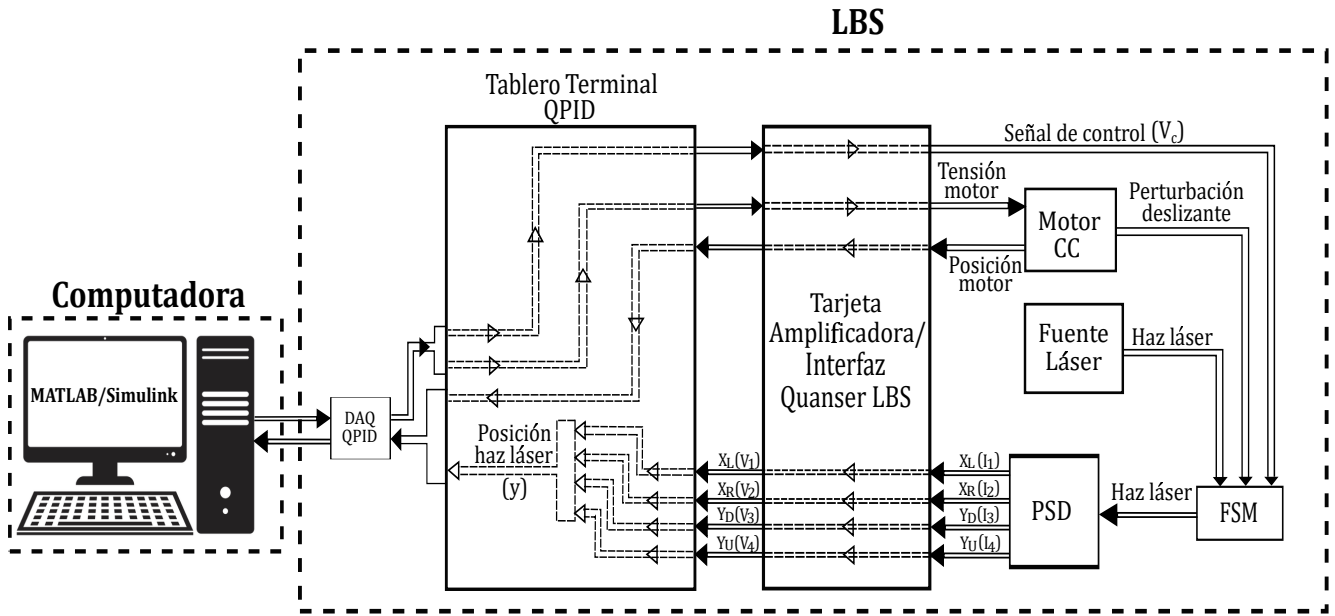


Figura 4: Diagrama de bloques general del sistema LBS.

Tabla 1: Componentes del módulo estabilizador láser.

ID	Descripción
1	Fuente estática láser
2	Detector sensible a la posición (PSD)
3	Resorte
4	Guía lineal
5	Motor CD
6	Arnés de solenoide
7	Carga excéntrica
8	Espejo
9	Eje de encoder de solenoide
10	Imanes permanentes
11	Tira de encoder
12	Riel guía
13	Conector Slide Command
14	Conector Coil Command
15	Conector Slide Encoder
16	Conector Coil Encoder
17	Conector PSD X1
18	Conector PSD X2
19	Conector PSD Y1
20	Conector PSD Y2
21	Encoder lineal de perturbación deslizante
22	Solenoide
23	Conector de alimentación ±15V CD
24	Plataforma LBS
25	Encoder rotatorio de solenoide
26	Tarjeta Amplificadora/Interfaz Quanser LBS
27	Perilla offset VR1
28	Perilla offset VR2

#### 4. Diseño del controlador ADRC para el sistema LBS

Esta sección está dedicada al diseño de la estrategia de control. Para ello, primeramente se aborda el diseño del observador

lineal de estado extendido, que permitirá estimar la velocidad del LBS y la perturbación total. También, se presenta el análisis de convergencia de dicho estimador en el sentido ISS, así como los planteamientos usados para la selección de las ganancias de dicho observador. Enseguida, será presentado el diseño del control, la prueba de estabilidad en el sentido ISS y los planteamientos para la selección de las ganancias del control. Se mostrará que la dinámica del error de observación y el control pueden verse como dos sistemas en cascada ISS, por lo que, por las propiedades de sistemas ISS, la dinámica del error del sistema en lazo cerrado es ISS. Finalmente, una interpretación del análisis ISS se lleva a cabo en el dominio de la frecuencia, permitiendo encontrarse con algunos resultados establecidos en la literatura.

##### 4.1. Diseño del Observador Lineal de Estado Extendido

Para el diseño del observador se asume lo siguiente:

- Solo la posición del haz láser es medida, i.e.,  $y = x_1$ .
- El valor nominal del parámetro  $b$  es conocido.
- La función de perturbación  $\xi(t, x_2, d)$  es uniformemente acotada, i.e.,  $\sup_t \|\xi(F, \dot{F}, \alpha, t)\|_\infty \leq K_0$ .
- La estimación de la perturbación es denotada por  $\hat{\xi}$ .
- La estimación redundante de la posición y la estimación de la velocidad son denotadas como  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$ , respectivamente.

de esta forma se propone el siguiente observador lineal de estado extendido:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + l_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{\xi} + l_2 (x_1 - \hat{x}_1) + bu \\ \dot{\hat{\xi}} = l_3 (x_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (8)$$

el conjunto de ganancias  $\{l_3, l_2, l_1\}$  son seleccionadas con la asistencia del siguiente polinomio característico Hurwitz de tercer orden, como se propone en (Sira-Ramírez et al., 2011; Sira-Ramírez et al., 2017)

$$P_{obs}^d(\lambda) = \left( \lambda^2 + \left( \frac{2\bar{\xi}\bar{\omega}_n}{\epsilon} \right) \lambda + \left( \frac{\bar{\omega}_n}{\epsilon} \right)^2 \right) \left( \lambda + \frac{\alpha}{\epsilon} \right) \quad (9)$$

lo que arroja

$$l_1 = \frac{2\bar{\xi}\bar{\omega}_n + \alpha}{\epsilon}; \quad l_2 = \frac{2\bar{\xi}\bar{\omega}_n\alpha + \bar{\omega}_n^2}{\epsilon^2}; \quad l_3 = \frac{\bar{\omega}_n}{\epsilon^3}\alpha \quad (10)$$

Note que el parámetro  $\epsilon$  otorga el carácter de alta ganancia al observador.

**Observación 4.1.** Las ganancias se eligen según (Kim et al., 2003), sin embargo también podrían haberse empleado métodos de optimización tal y como se propone en (Sala and Pitarch, 2016).

**Proposición 4.1.** Considere el observador dado en (8) y el sistema LBS, cuyo ultramodelo está dado por (7). Entonces, el error de estimación satisface la propiedad IOS (Estabilidad Entrada a Salida) (Sontag and Wang, 1995), i.e., las soluciones para la dinámica del error convergen a una esfera centrada en el origen del espacio de estado del error de estimación, cuyo radio es

$$\bar{\rho} = \frac{K_0}{\lambda_M} \quad (11)$$

donde  $K_0$  fue definido anteriormente y  $\lambda_M$  es un parámetro que depende de la selección de los coeficientes  $\{l_3, l_2, l_1\}$ . Además, la dinámica del error presenta una estabilidad asintótica a  $e = x_1 - \hat{x}_1 = 0$  para  $\xi = 0$ .

**Demostración 4.1.** Considere el error de estimación  $e = x_1 - \hat{x}_1$  y sus sucesivas derivadas junto con la dinámica del observador (8) y la del sistema LBS (7). Entonces el error de estimación  $e$  satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{e} = -l_3 e - l_2 \dot{e} - l_1 \ddot{e} + \dot{\xi} \quad (12)$$

La expresión en espacio de estados de (12) está dada por

$$\Sigma_{LESO} := \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\xi \\ e = \bar{C}\bar{x} \end{cases} \quad (13)$$

donde los componentes del estado  $\bar{x}$  son  $\bar{x}_1 = \int e(t)dt$ ,  $\bar{x}_2 = e$  y  $\bar{x}_3 = \dot{e}$ , y

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -l_3 & -l_2 & -l_1 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (14)$$

La fórmula de variación de parámetros brinda la siguiente solución analítica

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \exp^{\bar{A}t} \bar{x}(0) + \int_0^t \exp^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B} \xi d\tau \\ e(t) &= \bar{C} \exp^{\bar{A}t} \bar{x}(0) + \bar{C} \int_0^t \exp^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B} \xi d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

Si los valores de  $[l_1, l_2, l_3]$  son seleccionados como en (10), el polinomio característico de la matriz  $\bar{A}$  es el polinomio Hurwitz dado en (9), es decir,  $\bar{A}$  es Hurwitz y por consiguiente se obtiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \left\| \exp^{\bar{A}t} e(0) \right\| + \int_0^t \left\| \exp^{\bar{A}(t-\tau)} \bar{B} \xi d\tau \right\| \\ &\leq \underbrace{\left\| \exp^{\bar{A}t} e(0) \right\|}_{\beta(\|x(0)\|, t) \in \mathcal{KL}} + \underbrace{\|\xi\| \|\bar{B}\| \int_0^t \left\| \exp^{\bar{A}(t-\tau)} \right\| dt}_{\gamma(\|\xi\|_\infty) \in \mathcal{K}_\infty} \end{aligned} \quad (16)$$

esto muestra que existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  y una función  $\gamma$  de clase  $\mathcal{K}$  y por lo tanto la dinámica del error del observador es ISS, teniendo como entrada a la perturbación y como estado al error de observación. Además, debido a que la matriz  $\bar{A}$  es Hurwitz, la siguiente cota es establecida (Kia et al., 2019)

$$\left\| e^{\bar{A}t} \right\| \leq e^{-\lambda_M t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

donde  $\lambda_M = \lambda_{\max}(\text{Sym}(\bar{A}))$  es el máximo valor propio de  $\text{Sym}(\bar{A})$  con  $\text{Sym}(A) = (1/2)(A + A^T)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \exp^{-\lambda_M t} \|e(0)\| + K_0 \int_0^t \exp^{-\lambda_M(t-\tau)} d\tau \\ &\leq \exp^{-\lambda_M t} \|e(0)\| + \frac{K_0}{\lambda_M} (1 - \exp^{-\lambda_M t}) \end{aligned} \quad (17)$$

entonces el error de estimación  $e(t)$  converge exponencialmente a una esfera centrada en el origen del espacio de estados del error con radio  $\rho = \frac{K_0}{\lambda_M}$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y todas las trayectorias que se inician dentro de dicha esfera, nunca la abandonan. ■

#### 4.2. Diseño de la ley de control

El diseño del controlador se realizó con el objetivo de realizar tareas de regulación y seguimiento de trayectorias y siendo capaz de contrarrestar la perturbación total del sistema  $\xi$ . Por tanto, la ley de control propuesta es la siguiente

$$u = \frac{1}{b} \underbrace{(\ddot{x}_{1d} - \hat{\xi} - k_1(x_1 - x_{1d}) - k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_{1d}))}_{u_{fb}} \quad (18)$$

donde  $(x_{1d}, \dot{x}_{1d}, \ddot{x}_{1d})$  son la posición, velocidad y aceleración deseadas, respectivamente y  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$  son ganancias de sintonización. Note que  $\dot{x}_2$  y  $\hat{\xi}$  son la velocidad y el término de perturbación total estimados por el observador (8), respectivamente. En (18), los términos de feedforward y feedback son representados por  $u_{ff}$  y  $u_{fb}$  respectivamente.

Definiendo el error de seguimiento como  $z = [z_1, z_2]'$  con

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - x_{1d} \\ z_2 = x_2 - \dot{x}_{1d} \end{cases} \quad (19)$$

la dinámica del error de seguimiento está dada por

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \dot{x}_{1d} \\ \dot{z}_2 = -k_1 z_1 - k_2 (z_2 - \dot{x}_{1d}) - \hat{\xi} + \xi \end{cases} \quad (20)$$

teniendo en cuenta el error de estimación  $e$  y su derivada, se tiene que  $\dot{x}_2 = z_2 - l_1 e - \dot{e}$ , por lo que sustituyendo en (20), resulta en lo siguiente

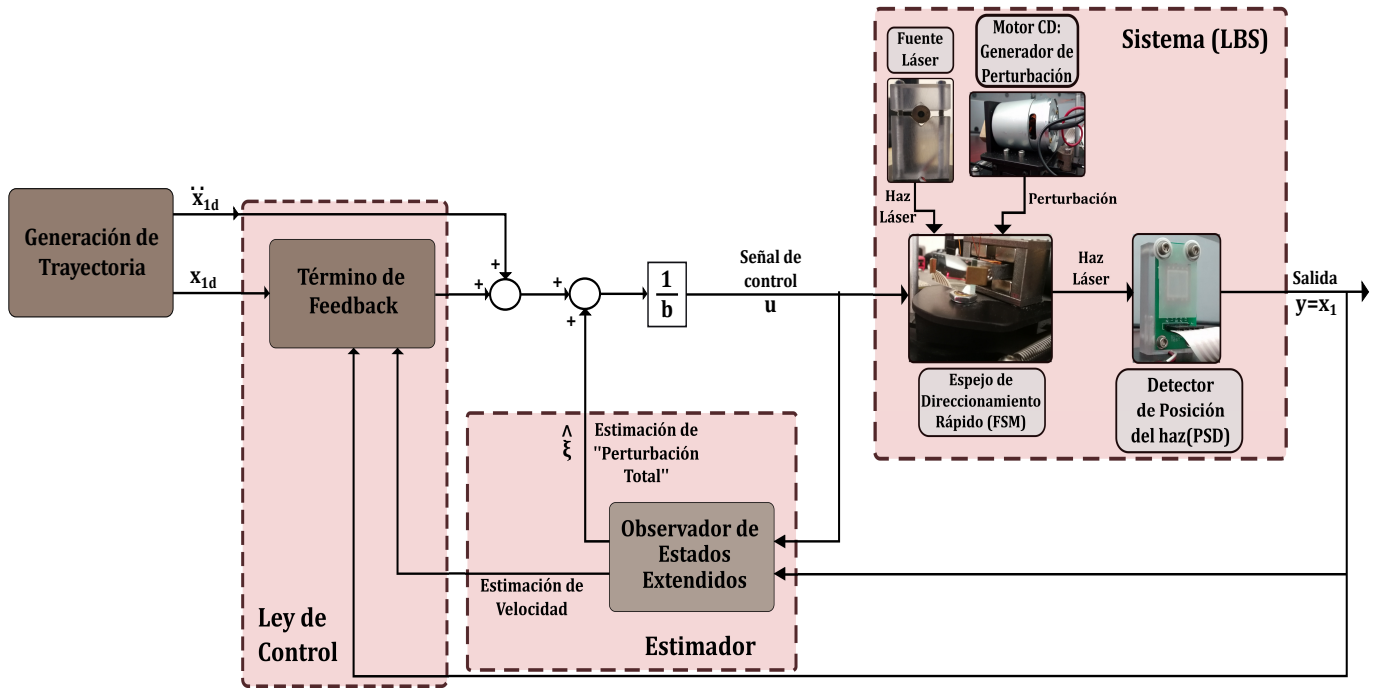


Figura 5: Esquema general de un control por ADRC.

$$\Sigma_{EC} := \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -k_1 z_1 - k_2 z_2 + \Phi \end{cases} \quad (21)$$

donde  $\Phi = -k_2(-\dot{e} - l_1 e) + \xi - \hat{\xi}$ . La expresión (21) puede ser reescrita en la forma  $\dot{z} = Az + \chi$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}, \quad \chi = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (22)$$

$\chi(t, e, \dot{e}, \xi, \hat{\xi})$  depende únicamente de variables uniformemente acotadas por lo que se puede afirmar que  $\|\chi\| \leq \Delta$ , con  $\Delta \in \mathbb{R}_+$ .

La elección de las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  se lleva a cabo con la asistencia del siguiente polinomio característico deseado

$$P_{con}^d(\lambda) = \lambda^2 + 2\xi^c \omega_n^c \lambda + (\omega_n^c)^2 \quad (23)$$

esto es

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = P_{con}^d(\lambda) \quad (24)$$

lo que arroja

$$k_1 = (\omega_n^c)^2; \quad k_2 = 2\xi^c \omega_n^c \quad (25)$$

El análisis de estabilidad del sistema perturbado (21) se lleva a cabo en términos de ISS y se presenta a continuación.

**Proposición 4.2.** La función  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$V = z^T P z \quad (26)$$

es una función de Lyapunov ISS para el sistema (21), donde  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz simétrica y definida positiva solución de la ecuación  $A^T P + P A = -I$  siendo  $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  la matriz identidad.

**Demostración 4.2.** Se puede apreciar que  $V$  es una función definida positiva, entonces la derivada de (26) a lo largo de las trayectorias en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{z}^T P z + z^T P \dot{z} \\ &= z^T \underbrace{(A^T P + P A)}_{-I} z + 2z^T P \chi \end{aligned} \quad (27)$$

Si se seleccionan los componentes de la matriz  $P$  de la siguiente forma  $p_{11} = \frac{k_2}{2k_1} + \frac{k_1+1}{2k_2}$ ,  $p_{12} = p_{21} = \frac{1}{2k_1}$ ,  $p_{22} = \frac{k_1+1}{2k_1 k_2}$ , se tiene que  $A^T P + P A = -I$ . En consecuencia  $\dot{V} = -z^T z + 2z^T P \chi$ , la cual está acotada de la siguiente forma

$$\dot{V} \leq - \underbrace{\|z\|^2}_{W(\|z\|)} + 2\lambda_{\max}\{P\} \|z\| \Delta \quad (28)$$

Puesto que  $W(\|z\|)$  es definida positiva y radialmente des-acotada, existe una función  $\varrho(\|z\|)$  de clase  $\mathcal{K}_\infty$  tal que  $W(\|z\|) \geq \varrho(\|z\|)$  por lo que

$$\dot{V} \leq -\varrho(\|z\|) + 2\lambda_{\max}\{P\} \|z\| \Delta \quad (29)$$

Sin pérdida de generalidad, sea  $\varrho(\|z\|) = \frac{1}{2}\|z\|^2$ , se sigue que si  $\|z\| \geq 4\lambda_{\max}\{P\} \Delta$  entonces  $\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\|z\|^2 = -\varrho(\|z\|)$ . A partir de la Definición 2.1, el Teorema 2.1 y los resultados obtenidos en (29) permiten afirmar que  $V$  es una función de Lyapunov ISS, por lo que el sistema (7) con la ley de control propuesta en (18) es ISS. ■

**Observación 4.2.** De acuerdo con la Proposición 4.2, se garantiza que las trayectorias del error de seguimiento, cuando  $t \rightarrow \infty$ , que empiezan fuera de la esfera  $\mathcal{B}(\rho)$ , con centro en el origen del espacio de estados del error y de radio  $\rho = 4\lambda_{\max}\{P\} \Delta$ , convergen a su interior y todas las trayectorias que se inician dentro de dicha esfera, nunca la abandonan.

Considere el control por rechazo activo de perturbaciones compuesto por el observador de estados extendido (8) y la ley de control (18), trabajando de manera conjunta para hacer que el sistema de direccionamiento de haz láser (6) siga de manera adecuada una trayectoria predeterminada o logre una regulación en un punto dado, incluso con la existencia de perturbaciones externas. A partir de las dinámicas representadas por (13) y (21), se aprecia que la dinámica del error de observación y la dinámica del error de seguimiento de trayectoria se pueden ver como dos sistemas ISS en cascada. Tenemos entonces el siguiente resultado, que establece la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

**Proposición 4.3.** *El control por rechazo activo de perturbaciones compuesto por el observador de estados extendido (8) y la ley de control (18) es ISS, cuando la perturbación total es vista como la entrada y el error de seguimiento  $z$  es visto como el estado.*

**Demostración 4.3.** *La demostración es una consecuencia directa de las propiedades de interconexión de sistemas que son estables en el sentido entrada-estado (Sontag and Wang, 1995; Sontag, 2008).*

#### 4.3. Interpretación en el dominio de la frecuencia del análisis ISS

Si bien el anterior análisis proporciona información sobre el comportamiento del error de seguimiento, en el espacio de estados del error, en este apartado se da una interpretación de dicho resultado en el dominio de la frecuencia.

Considere primeramente la función de transferencia de la dinámica del error del observador

$$\frac{e(s)}{\xi(s)} = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = \frac{s}{s^3 + l_1s^2 + l_2s + l_3} \quad (30)$$

Ahora considere la función de transferencia del controlador. Para ello considere (21), la cual puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Phi$$

$$y_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$H_1(s) = \frac{y_s(s)}{\Phi(s)} = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + k_2s + k_1} \quad (32)$$

Puesto que  $\Phi(t) = k_2\dot{e} + k_2l_1e(s) + \xi - \hat{\xi}$ , donde  $\hat{\xi} = l_3 \int_0^t e(\sigma)d\sigma$ , entonces

$$\Phi(s) = \frac{k_2s^2 + s(k_2l_1) - l_3}{s} e(s) + \xi(s) \quad (33)$$

Resolviendo para  $e(s)$  en (30) y sustituyendo en (33), se obtiene

$$\Phi(s) = \left[ \frac{s^3 + (l_1 + k_2)s^2 + (l_2 + k_2l_1)s}{s^3 + l_1s^2 + l_2s + l_3} \right] \xi(s) = H_2(s)\xi(s) \quad (34)$$

A partir de (32), la expresión entrada-salida, teniendo como salida el error de seguimiento del sistema y como entrada la perturbación total (ver Figura 6), está dada por

$$y_s(s) = H_1(s)H_2(s)\xi(s)$$

$$= \left[ \frac{s^3 + (l_1 + k_2)s^2 + (l_2 + k_2l_1)s}{(s^2 + k_2s + k_1)(s^3 + l_1s^2 + l_2s + l_3)} \right] \xi(s) \quad (35)$$

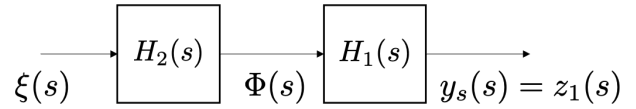


Figura 6: Interpretación de la dinámica del error en lazo cerrado en el dominio de la frecuencia

La función de transferencia (35) que tiene como entrada la perturbación total y salida el error de seguimiento, coincide con la función de transferencia del error de seguimiento en lazo cerrado de un esquema GPI (Generalized Proportional Integral Control) aplicado a un sistema representado por un doble integrador perturbado (Sira-Ramírez et al., 2017). Estos resultados muestran la conexión con resultados ahora clásicos y permite desprender las siguientes conclusiones también mencionadas en (Sira-Ramírez et al., 2017). La función (35) indica que a altas frecuencias, la perturbación es atenuada por un doble integrador

$$y_s(s) \approx \frac{\xi}{s^2} \quad (36)$$

con una pendiente de atenuación de  $40[dB/dec]$ . A bajas frecuencias, el filtro es aproximado a un diferenciador puro de la forma

$$y_s(s) \approx \left[ \frac{(l_2 + k_2l_1)s}{k_1l_3} \right] \xi(s) \quad (37)$$

Si se asegura que  $k_1l_3 \gg l_2 + k_2l_1$ , los efectos amplificadores generados al derivar la perturbación pueden ser atenuados.

## 5. Resultados

Esta sección tiene la finalidad de mostrar experimentalmente el correcto funcionamiento de la estrategia de control y validar los análisis teóricos anteriormente expuestos. Primeramente se describen los dos escenarios llevados a cabo como objetivos de control, a saber, regulación y seguimiento de trayectoria. También se mencionan los valores numéricos de las ganancias en el algoritmo de estimación y control. Los resultados obtenidos con el ADRC son mostrados gráficamente y discutidos. Posteriormente, se lleva a cabo un análisis de desempeño, usando la norma  $\mathcal{L}_2$  y el índice ISE (Integral del Error Cuadrático) considerando diez ensayos. El desempeño del ADRC es comparado con tres controladores, a saber, PID, Control por retroalimentación de estados con observador (OBSF) y controlador lineal cuadrático gaussiano (LQG). La sintonización de dichos controladores es mostrada en los Apéndice A, B y C.

Es importante recordar que el sistema experimental es el sistema LBS desarrollado por la empresa Quanser (Quanser, 2010) y la estrategia de control es implementada en MATLAB/Simulink en conjunto con el software de control en tiempo real QUARC<sup>TM</sup>, los cuales permiten comunicar una computadora con el sistema LBS mediante una tarjeta de adquisición de datos QPIDE (Quanser, 2021). Una descripción detallada de la plataforma experimental fue dada en la sección 3.



### 5.1. Implementación del ADRC: regulación y seguimiento de trayectoria

La respuesta en lazo cerrado del sistema de posicionamiento y dirección de haz láser bajo la acción del controlador propuesto, se obtuvo para el caso de regulación, donde se asignó como posición deseada el origen ( $x_d = 0\text{mm}$ ), y para seguimiento se definió como posición deseada  $x_d = M \sin(\omega^d t)$ , por lo que  $\dot{x}_d = M\omega \cos(\omega^d t)$  y  $\ddot{x}_d = -M\omega^2 \sin(\omega^d t)$  con amplitud  $M = 2\text{mm}$  y frecuencia deseada  $\omega^d = 5\text{rad/s}$ . Respecto a los parámetros del sistema, es importante mencionar que la ganancia en lazo abierto y la constante de tiempo están dadas por  $K = 2200$  y  $\tau = 0,005$  s, respectivamente. En cada caso se consideró la presencia y la ausencia de la perturbación generada por el motor de CC con carga asimétrica en el eje y que se encuentra acoplado al FSM con la finalidad de inducir vibración. El motor es alimentado con 1.8V durante los experimentos que consideran la presencia de perturbación. La sintonización de las ganancias del controlador y observador se llevó a cabo mediante los planteamientos dados en (10) y (25) dando como resultado:  $k_1 = 400$  y  $k_2 = 250000$ ,  $l_3 = 100 \times 10^6$ ,  $l_2 = 400 \times 10^3$ ,  $l_1 = 400$ .

En la Figura 7 se muestra el comportamiento del error de posición y velocidad en el caso de regulación. Dichas variables convergen a cero y al estar presente la perturbación externa, permanecen en una región acotada y cercana al origen del espacio de estados del error. Además, se observa como sin la presencia de la perturbación, el error de posición presenta un sobrepaso inicial de apenas 1.25 mm, convergiendo al valor deseado ( $x_d = 0\text{mm}$ ) en tan sólo 0.2 segundos. En el escenario donde la perturbación externa afecta al sistema, el error se mantiene acotado en una esfera de centrada en el origen del espacio de estados del error. En el caso específico del error de posición, dicho error se mantiene acotado en el intervalo dado por  $\pm 0.5$  mm. Un comportamiento semejante es el que presenta la evolución del error de velocidad, el cual se encuentra confinado en un intervalo de  $\pm 10$  mm/s.

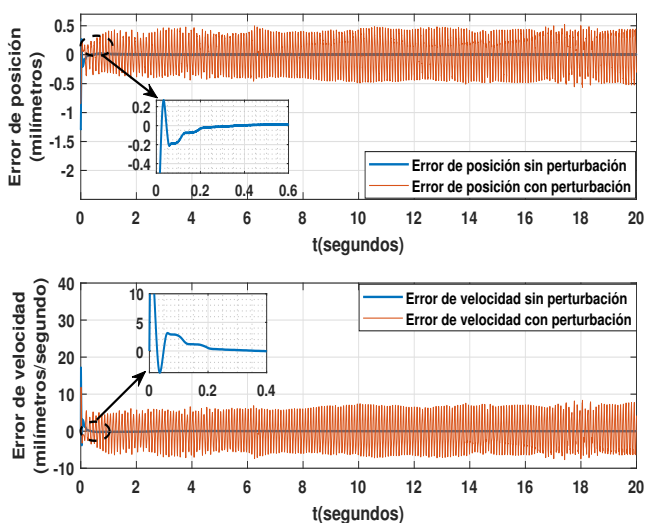


Figura 7: Errores de posición y velocidad para el caso de regulación

Por otro lado, en la Figura 8 se aprecian la evolución temporal de la posición medida y velocidad estimada, para el caso de seguimiento de trayectoria, donde se muestra que gracias a la estrategia de control, el sistema es capaz de seguir la trayectoria deseada. A primera vista, pareciera que la perturbación afecta más cuando el objetivo de control es el seguimiento que en el caso de regulación. Sin embargo, al analizar la evolución del error de seguimiento, el cual es mostrado en la Figura 9, se observa la evolución de los errores de posición y velocidad para el caso de seguimiento, permitiendo apreciar con mayor detalle la diferencia entre valores deseados y valores medidos o estimados. Además, esta gráfica permite validar que el error de seguimiento se mantiene acotado a pesar de las perturbaciones externas y las dinámicas no modeladas del sistema. Incluso, es posible notar que tanto el error de posición, como el de velocidad, se mantienen dentro de un intervalo acotado de manera muy similar a los resultados obtenidos en el caso de regulación.

Es importante resaltar que el desarrollo experimental de la estrategia de ADRC, presentada y analizada bajo un enfoque ISS, concuerda con los análisis teóricos, los cuales dictan que el sistema en lazo cerrado del ADRC es *robustamente estable*. Lo anterior, significa que con el ADRC se garantiza que las trayectorias del error que empiezan fuera de una esfera  $\mathcal{B}(\rho)$ , con centro en el origen del espacio de estados del error y de radio  $\rho = 4\lambda_{\max}\{P\}\Delta$ , convergen a su interior y todas las trayectorias que se inician dentro de dicha esfera, nunca la abandonan. La matriz  $P$  depende directamente de las ganancias del control ( $k_1, k_2$ ) y  $\Delta$  depende del error de estimación y de la magnitud de la perturbación externa.

Finalmente, se aprecia en la Figura 10 el comportamiento de la señal de control para cada caso de estudio, la que incluso ante la presencia de la perturbación, se mantiene en valores lejanos a los límites máximos preestablecidos de  $\pm 10\text{V}$  para el solenoide. Esto muestra que la sintonización del ADRC es adecuada y siempre se tiene control suficiente (energía suficiente) para rechazar la perturbación.

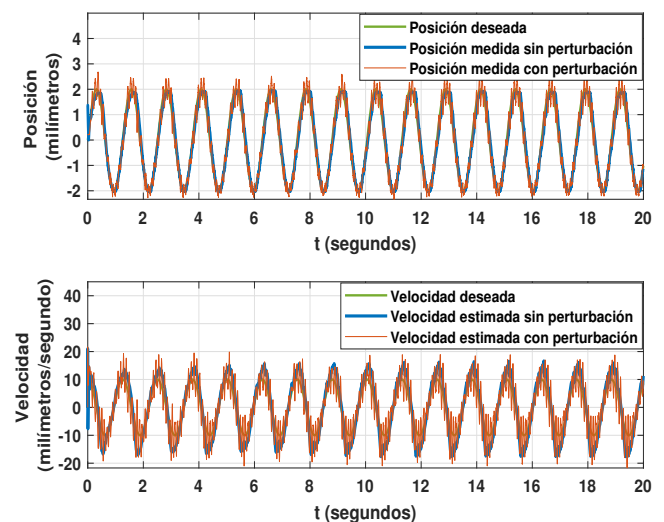


Figura 8: Comportamiento de la posición medida y la velocidad estimada para el caso de seguimiento de trayectoria.

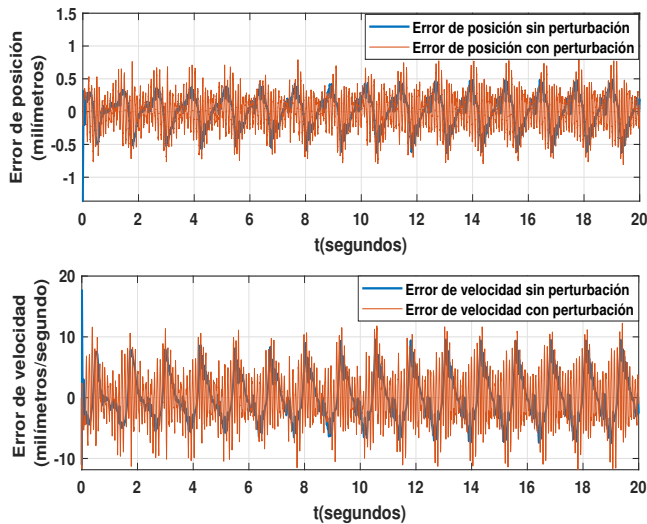


Figura 9: Errores de posición y velocidad para el caso de seguimiento de trayectoria

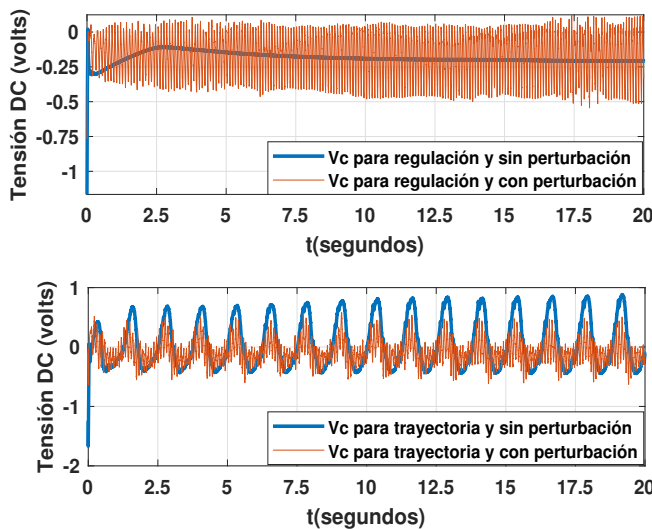


Figura 10: Señal de control para los casos de regulación y de seguimiento de trayectoria.

## 5.2. Análisis de desempeño

Para analizar el rendimiento del controlador propuesto para los casos de regulación y seguimiento de trayectoria, fueron empleadas la norma  $\mathcal{L}_2$  y el índice ISE. Igualmente se realizó la comparativa de desempeño del controlador diseñado con otros 3 controladores existentes en la literatura, estos son el PID diseñado en (Konadu et al., 2013), un controlador por realimentación de estados con observador (por sus siglas en inglés, OBSF) (Åström and Murray, 2010) y un regulador lineal cuadrático gaussiano (por sus siglas en inglés, LQG) (Boyd and Barratt, 1991). Con el objetivo de proporcionar veracidad en los resultados obtenidos en este artículo, para cada norma se realizaron 10 ensayos con cada controlador para cada caso de estudio propuesto en este trabajo, así como con la presencia o no de perturbación, ya que el experimento por su propia naturaleza, en

cada prueba puede tener una ligera variación en los resultados. Para una adecuada lectura de dichos resultados, en cada norma se realizó la comparación del promedio de los 10 ensayos obtenidos con cada controlador. La interpretación de los promedios obtenidos con cada norma va a radicar en que el controlador con mejor desempeño corresponde al que presente un menor promedio de las muestras de rendimiento recopiladas en cada escenario estudiado.

### 5.2.1. Norma $\mathcal{L}_2$

La norma  $\mathcal{L}_2$  definida en (38), permite realizar un análisis cuantitativo (rendimiento del estado transitorio) (Boyd and Barratt, 1991).

$$\mathcal{L}_2 = \sqrt{\int_0^T \|z_1(t)\|^2 dt} \quad (38)$$

donde  $z_1$  es el error de posición. Al observarse las Tablas 2 y 3, donde se muestra el promedio de diez ensayos, se aprecia que el controlador ADRC ofrece ligeramente un mejor desempeño que los otros controladores. Es importante mencionar que el presente trabajo no tiene la finalidad de dejar mal posicionados a los otros controladores, los cuales están basados en una teoría madura y bien conocida. Al contrario, el objetivo es mostrar que el controlador propuesto cumple con los planteamientos teóricos expuestos y de paso, se tiene resultados similares a los obtenidos con técnicas convencionales. Cabe mencionar que los controladores usados en la comparación, fueron sintonizados cuidadosamente, siguiendo metodologías bien establecidas con la finalidad de ser los más objetivos posibles. En el Apéndice A, B y C se muestran los pasos de dicha sintonización.

### 5.2.2. Índice ISE

El criterio de la integral del error cuadrático definido en (39), es una medida indirecta de la velocidad de respuesta de un servomecanismo (Clark, 1961).

$$ISE = \int_0^T z_1^2(t) dt \quad (39)$$

donde  $z_1$  es el error de posición. Al igual que al aplicar la norma anterior, en el caso de la ISE se obtiene un mejor desempeño por parte del controlador ADRC, hecho que se puede apreciar a detalle en el promedio de diez ensayos dado en las Tablas 4 y 5.

## 6. Conclusiones

El trabajo presenta un enfoque teórico-experimental en el diseño de un ADRC para el control de posición de un sistema óptico láser. Respecto a la parte teórica, el trabajo aborda el análisis del ahora bien conocido y maduro ADRC desde un enfoque de estabilidad entrada a estado, ISS. El análisis desarrollado permite formalizar y fusionar de una manera clara y sistemática, conceptos previamente reportados en la literatura. Se espera que este análisis ayude tanto a teóricos como experimentales a llevar a cabo una implementación pragmática de la técnica ADRC, incluyendo controladores no lineales.

Tabla 2: Análisis de desempeño para el caso de regulación empleando la norma  $\mathcal{L}_2$ .

	Sin perturbación				Con perturbación			
	PID	OBSF	LQG	ADRC	PID	OBSF	LQG	ADRC
<b>Promedio</b>	0.68639	0.77539	0.58873	0.19895	0.92459	1.0305	0.95253	0.88943

Tabla 3: Análisis de desempeño para el caso de seguimiento de trayectoria empleando la norma  $\mathcal{L}_2$ .

	Sin perturbación				Con perturbación			
	PID	OBSF	LQG	ADRC	PID	OBSF	LQG	ADRC
<b>Promedio</b>	1.39815	1.57293	1.49407	0.87789	1.06445	1.64943	1.04974	0.98108

Respecto a la parte experimental, el esquema de control fue implementado para el caso de regulación y seguimiento de trayectorias. Los resultados experimentales permitieron apreciar la respuesta del sistema en lazo cerrado para una posición y trayectoria deseadas, incluyendo en ambas la perturbación generada por un motor de CC presente en la planta experimental. Para cada caso de estudio se obtuvieron errores de posición y velocidad que presentaron picos en la respuesta transitoria relativamente pequeños y con una convergencia rápida a cero (sin perturbación), los cuales al estar presente la perturbación permanecieron acotados y en un rango cercano a cero. A su vez, se mantuvo en cada caso una señal de control con valores de tensión bajos, sin afectar a los límites permitidos por el solenoide rotacional. Finalmente se realizó un análisis de desempeño del ADRC empleado la norma  $\mathcal{L}_2$  y el índice ISE, siendo comparado con el rendimiento obtenido con los controladores: PID, OBSF y LQG. Los resultados muestran que el ADRC tiene un desempeño ligeramente superior, lo cual valida la propuesta.

## 7. Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores anónimos por su revisión minuciosa y críticas constructivas. El primer autor agradece a J. Linares-Flores y H. Sira-Ramírez por las fructíferas discusiones sobre la teoría de control, las aplicaciones y en particular acerca de la técnica ADRC y sus bondades.

## Referencias

- Al-Alwan, A., Guo, X., N'Doye, I., Laleg-Kirati, T., Aug 2017. Laser beam pointing and stabilization by fractional-order PID control: Tuning rule and experiments. In: Proc. of the 2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA). DOI: 10.1109/CCTA.2017.8062699
- Alizadegan, A., Zhao, P., Nagamune, R., Chiao, M., 2018. Robust  $H_\infty$  control of miniaturized optical image stabilizers against product variabilities. Control Engineering Practice 80, 70 – 82. DOI: 10.1016/j.conengprac.2018.08.006
- Åström, K. J., Murray, R. M., 2010. Feedback systems: an introduction for scientists and engineers. Princeton university press.
- Baronti, F., Lazzeri, A., Lenzi, F., Roncella, R., Saletti, R., Saponara, S., 2009. Voice coil actuators: From model and simulation to automotive application. In: 2009 35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics. pp. 1805–1810. DOI: 10.1109/IECON.2009.5414837
- Boyd, S. P., Barratt, C. H., 1991. Linear controller design: limits of performance. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Carreno-Zagarra, J., Guzmán, J., Moreno, J., Villamizar, R., 2019. Linear active disturbance rejection control for a raceway photobioreactor. Control Engineering Practice 85, 271–279. DOI: 10.1016/j.conengprac.2019.02.007
- Clark, R., 1961. Integral of the error squared as a performance index for automatic control systems. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry 79 (6), 467–471. DOI: 10.1109/TAI.1961.6371690
- Deng, J., Xue, W., Zhou, X., Mao, Y., 2020. On disturbance rejection control for inertial stabilization of long-distance laser positioning with movable platform. Measurement and Control 53 (7-8), 1203–1217. DOI: 10.1177/0020294020935492
- Freidovich, L. B., Khalil, H. K., 2008. Performance recovery of feedback-linearization-based designs. IEEE Transactions on automatic control 53 (10), 2324–2334. DOI: 10.1109/TAC.2008.2006821
- Guerrero-Castellanos, J., Rifai, H., Arnez-Paniagua, V., Linares-Flores, J., Saynes-Torres, L., Mohammed, S., 2018. Robust active disturbance rejection control via control Lyapunov functions: Application to Actuated-Ank foot-Orthosis. Control Engineering Practice 80, 49 – 60. DOI: 10.1016/j.conengprac.2018.08.008
- Guo, B.-Z., Zhao, Z.-L., 2016. Active disturbance rejection control for nonlinear systems: An introduction. John Wiley & Sons. DOI: 10.1002/9781119239932.ch1
- Han, J., 2009. From PID to active disturbance rejection control. Transactions on Industry Electronics 56 (3), 900–906. DOI: 10.1109/TIE.2008.2011621
- Hernandez-Méndez, A., Linares-Flores, J., Sira-Ramírez, H., Guerrero-Castellanos, J., Mino-Aguilar, G., 2017. A backstepping approach to decentralized active disturbance rejection control of interacting boost converters. Transactions on Industry Applications 53 (4), 4063–4072. DOI: 10.1109/TIA.2017.2683441
- Kia, S. S., Van Scoy, B., Cortes, J., Freeman, R. A., Lynch, K. M., Martinez, S., June 2019. Tutorial on dynamic average consensus: The problem, its applications, and the algorithms. IEEE Control Systems Magazine 39 (3), 40–72. DOI: 10.1109/MCS.2019.2900783
- Kim, B.-S., S.Gibson, T.-C. Tsao, June 2004. Adaptive control of a tilt mirror for laser beam steering. In: Proc. of the 2004 American Control Conference. DOI: 10.23919/ACC.2004.1384437
- Kim, Y., Keel, L., Bhattacharyya, S., 2003. Transient response control via characteristic ratio assignment. IEEE Transactions on Automatic Control 48 (12), 2238–2244. DOI: 10.1109/TAC.2003.820153
- Konadu, K. A., Yi, S., 2011. Design of controllers for a laser beam stabilizer using pid and observer-based state feedback control. In: 2011 ASME Early Career Technical Conference, ASME ECTC. Vol. 10. pp. 91–98.
- Konadu, K. A., Yi, S., Choi, W., Abu-Lebdeh, T., 2013. Robust positioning of laser beams using proportional integral derivative and based observer-feedback control. American Journal of Applied Sciences 10 (4), 374–387. DOI: 10.3844/ajassp.2013.374.387
- Landolsi, T., Dhaouadi, R., Aldabbas, O., 2011. Beam-stabilized optical switch using a voice-coil motor actuator. Journal of the Franklin Institute 348 (1), 1 – 11. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2009.02.004
- Martinez, J., Sename, O., Voda, A., 2009. Modeling and robust control of Bluray disc servo-mechanisms. Mechatronics 19 (5), 715 – 725. DOI: 10.1016/j.mechatronics.2009.02.006
- Pérez-Arancibia, N., Chen, N., Gibson, J., Tsao, T.-C., 2006. Variable-order adaptive control of a microelectromechanical steering mirror for suppression of laser beam jitter. Optical Engineering 45 (10), 1 – 12. DOI: 10.1117/1.2363189
- Pérez-Arancibia, N., Gibson, J., Tsao, T.-C., June 2009. Frequency-weighted

Tabla 4: Análisis de desempeño para el caso de regulación empleando el índice ISE.

	Sin perturbación				Con perturbación			
	PID	OBSF	LQG	ADRC	PID	OBSF	LQG	ADRC
<b>Promedio</b>	0.09312	0.58959	0.4262	0.02208	0.85635	1.06547	0.90912	0.83928

Tabla 5: Análisis de desempeño para el caso de seguimiento de trayectoria empleando el índice ISE.

	Sin perturbación				Con perturbación			
	PID	OBSF	LQG	ADRC	PID	OBSF	LQG	ADRC
<b>Promedio</b>	3.70274	4.68287	4.4009	0.8291	1.09345	1.32294	1.10253	0.95415

minimum-variance adaptive control of laser beam jitter. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics 14 (3), 337–348.

DOI: 10.1109/tmech.2009.2017532

Quanser, 2010. Laser beam stabilization instructor manual. Quanser Speciality Experiment Series: LBS Laboratory Workbook.

Quanser, 2021. Qpide data acquisition device.

URL: <https://www.quanser.com/products/>

Sala, A., Pitarch, J. L., 2016. Optimisation of transient and ultimate inescapable sets with polynomial boundaries for nonlinear systems. Automatica 73, 82–87.

DOI: 10.1016/j.automatica.2016.06.017

Sira-Ramírez, H., Hernández-Méndez, A., Linares-Flores, J., Luviano-Juarez, A., 2016. Robust flat filtering dsp based control of the boost converter. Control Theory and Technology 14 (3), 224–236.

DOI: 10.1007/s11768-016-6025-6

Sira-Ramírez, H., Linares-Flores, J., Luviano-Juárez, A., Cortés-Romero, J., 2015. Ultramodelos globales y el control por rechazo activo de perturbaciones en sistemas no lineales diferencialmente planos. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (RIAI) 12 (2), 133 – 144.

DOI: 10.1016/j.riai.2015.02.001

Sira-Ramírez, H., Luviano-Juárez, A., Cortés-Romero, J., 2011. Control lineal robusto de sistemas no lineales diferencialmente planos. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI 8 (1), 14–28.

DOI: 10.1016/S1697-7912(11)70004-8

Sira-Ramírez, H., Luviano-Juárez, A., Ramírez-Neria, M., Zurita-Bustamante, E., 2017. Active Disturbance Rejection Control of Dynamic Systems. Butterworth-Heinemann.

DOI: 10.1016/c2016-0-01983-6

Sontag, E. D., 2008. Input to State Stability: Basic Concepts and Results. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 163–220.

DOI: 10.1007/978-3-540-77653-6\_3

Sontag, E. D., Wang, Y., 1995. On characterizations of the input-to-state stability property. Systems and Control letters 24 (5), 351–359.

DOI: 10.1016/0167-6911(94)00050-6

Tran, M.-S., Hwang, S.-J., 2020. Design and simulation of electromagnetic linear actuators for jet dispensers. Applied Sciences 10 (5).

DOI: 10.3390/app10051653

Yue, Y., Song, Z., Aug 2015. An integral resonant control scheme for a laser beam stabilization system. In: Proc. of the 2015 IEEE International Conference on Information and Automation.

DOI: 10.1109/icinfa.2015.7279656

## Apéndice A. Sintonización del controlador PID

El controlador utilizado es un PID de 2 grados de libertad (Åström and Murray, 2010) y la sintonización es realizada siguiendo los planteamientos propuestos por (Quanser, 2010), (Konadu and Yi, 2011) y (Konadu et al., 2013).

$$U(s) = (R(s) - Y(s)) \frac{K_i}{s} - K_p Y(s) - K_d h(s) Y(s) \quad (\text{A.1})$$

Las ganancias son elegidas primeramente considerando un derivador ideal, es decir,  $h(s) = s$ . Sin embargo, en la práctica, el término derivativo  $h(s)$  se implementa mediante un filtro de segundo orden.

Usando el control (A.1) y considerando que el modelo del sistema está dado por  $P(s) = \frac{K}{\tau s^2 + s}$ , la función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KK_i}{\tau s^3 + s^2(1 + KK_d) + KK_p s + KK_i} \quad (\text{A.2})$$

Usando el polinomio característico deseado  $P_{des}(s) = (s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2)(s + p_0)$  y comparando con el denominador de (A.2) se tiene

$$K_p = \frac{\omega_0(\omega_0 + 2\xi_0 p_0)\tau}{K} \quad (\text{A.3})$$

$$K_i = \frac{\omega_0^2 p_0 \tau}{K} \quad (\text{A.4})$$

$$K_d = \frac{2\xi_0\omega_0\tau + p_0\tau - 1}{K} \quad (\text{A.5})$$

Para la sintonización del controlador PID se consideran las siguientes especificaciones:

1. El coeficiente de amortiguamiento relativo es seleccionado como  $\xi_0 = 1$ .
2. La frecuencia natural  $\omega_0$  se selecciona usando la función de sensibilidad del sistema en lazo cerrado, de donde se especifica que la ganancia no exceda el 0.005 en la frecuencia de perturbación, es decir,  $|S(\omega_d)| \leq 0,005$ . La frecuencia de perturbación se asume  $\omega_d = 20\pi$  (10Hz). Así entonces,  $\omega_0 = \sqrt{-\tau|S(\omega_d)|\omega_d(\omega\tau|S(\omega_d)| - \sqrt{\omega_s^2\tau^2 + 1})}$ .
3. La posición del polo  $p_0$  se selecciona a  $-0,5$  (polo lento).
4. La parte derivativa se implementa con el filtro de segundo orden dado por:  $h(s) = \frac{\omega_f^2}{s^2 + 2\omega_f\xi_f s + \omega_f^2}$ , donde  $\omega_f = 10\omega_0$  y  $\xi_f = 0,7$ .

Esto arroja:

$$K_p = 0,722, K_d = 0,002, K_i = 0,360$$

## Apéndice B. Sintonización del controlador por retroalimentación de estados con observador (OBSF)

El modelo nominal del sistema y sin perturbación en espacio de estados está dado por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}}_B u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde  $a = 1/\tau$  y  $b = K/\tau$ .

El sistema es controlable y la ley de control utilizada es:

$$u = -kx + k_r r \quad (\text{B.2})$$

donde la ganancia  $k = [k_1 \ k_2]$  es calculada mediante la asignación de polos usando el polinomio característico del sistema en lazo cerrado  $P_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 2\omega_0\xi_0\lambda + \omega_0^2$  con  $\omega_0$  y  $\xi_0$  teniendo los mismos valores que el controlador PID.

$$|\lambda I - (A - Bk)| = \lambda^2 - \lambda \left( \frac{1 + Kk_2}{\tau} \right) + \frac{Kk_1}{\tau} \quad (\text{B.3})$$

Así se obtiene:

$$k_1 = \frac{\tau\omega_0^2}{K} \quad (\text{B.4})$$

$$k_2 = 2\omega_0\xi_0\tau - 1 \quad (\text{B.5})$$

La ganancia de precompensación para regulación a valores diferentes de cero se calcula mediante:

$$k_r = -(C(A - Bk)^{-1}B)^{-1} \quad (\text{B.6})$$

Puesto que el sistema es observable con salida  $y = x_1$ , el diseño de un observador es posible, y tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L_{obs}(y - C\hat{x}) \quad (\text{B.7})$$

Como regla de mano, la matriz  $L_{obs} = [l_1 \ l_2]^T$  se elige tal que el polinomio característico de la matriz  $A_{obs} = A - LC$  tenga raíces que sean al menos 5 veces más alejadas de los polos del controlador. Esto arroja:

$$\begin{aligned} k_1 &= 259490; & k_2 &= 309,4; & l_1 &= 0,0042; \\ l_2 &= 8,6007; & k_r &= 0,58975 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

### Apéndice C. Sintonización del regulador lineal cuadrático gaussiano (LQG)

En el caso del controlador LQG, la estructura es similar a la del control OBSF. Este se compone por un regulador lineal

cuadrático (LQR) y un estimador lineal cuadrático (LQE) o filtro de Kalman. La expresión del controlador LQG está dada por:

$$u = -K_{opt}\hat{x} + k_{r_{opt}}r \quad (\text{C.1})$$

donde  $K_{opt} = -Q_u^{-1}B^T P_c$  y  $k_{r_{opt}} = -[C(A - BK_{opt})^{-1}B]^{-1}$ , Siendo  $P_c \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  una matriz simétrica definida positiva, la solución de la ecuación matricial algebraica de Riccati está dada por:

$$P_c A + A^T P_c - P_c B Q_u^{-1} B^T P_c + Q_x = 0 \quad (\text{C.2})$$

Los valores utilizados para  $Q_u$  y  $Q_x$  son:

$$Q_u = 1, \quad Q_x = \rho \begin{bmatrix} (440000)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

donde la ganancia  $\rho = 0,348$ . Estos valores fueron elegidos haciendo un compromiso en el tiempo de estabilización y la magnitud de la señal de control. Esto arrojó:

$$K_{opt} = [259560 \ 547,7469]; \quad k_{r_{opt}} = 0,5899 \quad (\text{C.4})$$

Para la estimación de  $\hat{x}$  se utiliza el filtro de Kalman

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L_{opt}(y - C\hat{x}) \quad (\text{C.5})$$

con  $L_{opt} = P_0 C^T R_v^{-1}$ , donde  $P_0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz simétrica definida positiva. La solución de la ecuación matricial algebraica de Riccati está dada por:

$$AP_0 + P_0 A^T - P_0 C^T R_v^{-1} C P_0 + R_\omega = 0 \quad (\text{C.6})$$

Por simplicidad, la ganancia  $L_{opt}$  se obtuvo aplicando el comando *kalman* de Matlab, donde se propusieron las matrices de covarianza  $R_\omega$  y  $R_v$  para la perturbación en la planta  $\omega$  y el ruido en la medición  $v$ , asumiendo este último del 1 % en el PSD, quedando:

$$R_v = \begin{bmatrix} 10 \exp^6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_\omega = 0,0001 \quad (\text{C.7})$$

Obteniéndose entonces:

$$L_{opt} = \begin{bmatrix} 0,1194 \\ 3138,2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$