



Las ecuaciones de Saint Venant para la modelización de avalanchas de nieve densa

Saint Venant's equations for dense-snow avalanche modelling

Sanz-Ramos, M. ^{a1}, Bladé, E. ^{a2}, Torralba, A. ^{a3}, Oller, P. ^b

^{a1}Instituto FLUMEN (UPC-CIMNE), E.T.S. d'Enginyeria de Camins, Canal i Ports de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya – Barcelona TECH, C/Gran Capitán S/N, 08034 Barcelona, España.

^bGeoneuRisk. Av. Pompeu Fabra 19-21, Esc. A, Pral. 1a, 08024 Barcelona, España.

E-mail: ^{a1}marcos.sanz-ramos@upc.edu, ^{a2}ernest.blade@upc.edu ^{a3}torralba.an@gmail.com, ^bgeoneurisk@geoneurisk.com

Recibido: 04/09/2019

Aceptado: 14/12/2019

Publicado: 31/01/2020

Citar como: Sanz-Ramos, M., Bladé, E., Torralba, A., Oller, P. (2020). Saint Venant's equations for dense-snow avalanche modelling. *Ingeniería del agua*, 24(1), 65-79. <https://doi.org/10.4995/la.2020.12302>

RESUMEN

La creciente preocupación por los riesgos naturales, como las avalanchas de nieve, ha propiciado el desarrollo de modelos numéricos *ad hoc* como una herramienta de soporte para su análisis y evaluación. Los modelos existentes para simulación de aludes se basan en la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, que son unas ecuaciones similares a las ecuaciones de Saint Venant para agua con diferencias sólo en los términos de fricción (modelo reológico). Este documento muestra las posibilidades de estas ecuaciones para simular avalanchas de placa-densa y el tratamiento numérico realizado en Iber. Se ha empleado una nueva metodología para equilibrar el término fuente y el vector de flujo evitando así oscilaciones espurias y movimientos no reales, y que modifica la pendiente de fondo en base a los parámetros del fluido y así detener su movimiento. La herramienta se ha probado en dos casos de estudio para analizar el comportamiento del fluido en función de los parámetros del modelo reológico.

Palabras clave | modelización numérica; 2D-SWE; fluidos no-Newtonianos; avalanchas de nieve.

ABSTRACT

The growing concern about natural hazards, such as snow avalanches, has led to the development of ad hoc numerical models as a support tool for their analysis and evaluation. Existing models for avalanche simulation are based on the conservation of mass and the momentum, which are similar equations to the Saint Venant equations for water with differences only in terms of friction (rheological model). This document shows the possibilities of these equations to simulate dense-slab avalanches and the numerical treatment carried out in Iber. A new methodology has been used to balance the source term and the flow vector to avoid spurious oscillations and unreal movements, modifying the bottom slope based on the fluid parameters and thus stop its movement. The tool has been tested in two case studies to analyse the behaviour of the fluid depending on the parameters of the rheological model.

Key words | numerical modelling; 2D-SWE; non-Newtonian flows; snow avalanches.

INTRODUCCIÓN

La nieve es un estado sólido del agua que se forma por la precipitación del vapor de agua a bajas temperaturas (por debajo del punto de congelación). Está compuesta por cristales de hielo con características geométricas que le confiere cierto grado de macro- y micro- rugosidad (Figura 1a). Al acumularse, forman una entidad difícil de disgregar debido al encaje de los copos entre sí (Figura 1b), lo que le otorga cierta cohesión. Después de una nevada, la acumulación de copos provoca la compactación y cambio de propiedades de la capa de nieve, comportándose como un sólido estable *per se* en ausencia de fuerzas externas.



Figura 1 | Cristales de hielo vistos con un microscopio (a) y aglomeración de cristales formando copos debido a la precipitación (b). Fuente: Wikimedia (a) y lageografia.com (b).

Una avalancha de nieve es el movimiento, parcial o completo, de la capa de nieve situada sobre otra capa de nieve o directamente sobre el terreno, pasando de un estado sólido a fluido. Desde un punto de vista morfológico, los aludes pueden clasificarse en dos grupos: tipo placa o como nieve suelta (ICSI-IAHS, 1981). Una vez iniciado el movimiento, la nieve puede permanecer agregada (avalancha de flujo o densa) o pulverizarse (avalancha en polvo). El desarrollo de una y otra depende de las propiedades de la nieve (estado evolutivo, densidad, contenido de humedad, etc.).

Diversos factores pueden activar el movimiento de la nieve provocando una avalancha (Figura 2). Su desencadenamiento depende de la estructura interna de la nieve (temperatura, densidad, humedad, tipo de nieve), de factores externos (temperatura, viento, gradientes de humedad, deposición de nieve nueva), de la actividad humana (p.ej. el paso de un esquiador) y de factores inherentes como la topografía (Schweizer et al., 2003). Las avalanchas de placa-densa, seca y húmeda, son el objeto del presente trabajo (Figura 3). Se caracterizan por el deslizamiento de uno o varios bloques cohesivos apoyados sobre una capa débil de nieve situada en pendientes moderadas ($28-45^\circ$), con una densidad inicial alrededor de 300 kg/m^3 (Christen et al., 2001) y una velocidad de desplazamiento que puede superar los 20 m/s (Bartelt et al., 2015). Los trabajos de Gaume et al. (2017) y Schweizer et al. (2003) muestran las causas de la formación de este tipo de avalanchas, siendo poco estudiadas en contraste con las avalanchas de nieve suelta.

La creciente preocupación por los riesgos naturales, y concretamente asociados a avalanchas de nieve, ha propiciado el desarrollo de modelos numéricos *ad hoc* como una herramienta de soporte para el análisis y evaluación del riesgo por aludes. La forma más habitual para modelizar el movimiento de los aludes de nieve es mediante la resolución de la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento de un fluido bajo la hipótesis de presión hidrostática, es decir, con unas ecuaciones muy similares a las del flujo de agua en lámina libre (ecuaciones de Saint Venant). La principal diferencia entre las ecuaciones para agua y para nieve reside en los términos de fricción, que se aproximan empleando un modelo reológico diferente al del agua.

Para la modelización numérica de los aludes se puede utilizar una aproximación unidimensional (1D), como hace AVAL1D (Christen et al., 2002), en las que se define el eje de la trayectoria principal y secciones perpendiculares. En una descripción bidimensional (2D), como hace RAMMS (Christen et al., 2010), el dominio de trabajo se discretiza en celdas (malla de cálculo). En ambas aproximaciones se emplea la descripción espacial propuesta por Savage y Hutter (1989) (coordenadas curvilíneas) y el fluido se considera como un continuo. Recientemente han habido intentos con modelos tridimensionales basados en discretizaciones por partículas (Hungry y McDougall, 2009), permitiendo pasar de un análisis de fluido como un continuo a un fluido disgregado. Sin

embargo, su uso es limitado debido al elevado coste computacional para el dominio de trabajo habitual de las avalanchas de nieve, alcanzando varios cientos de hectáreas (Ancey et al., 2004; Barbolini e Issler, 2006; Blagovechshenskiy et al., 2002; Gruber y Bartelt, 2007; Issler et al., 2005; Maggioni et al., 2013; Thibert et al., 2015; Wever et al., 2018).

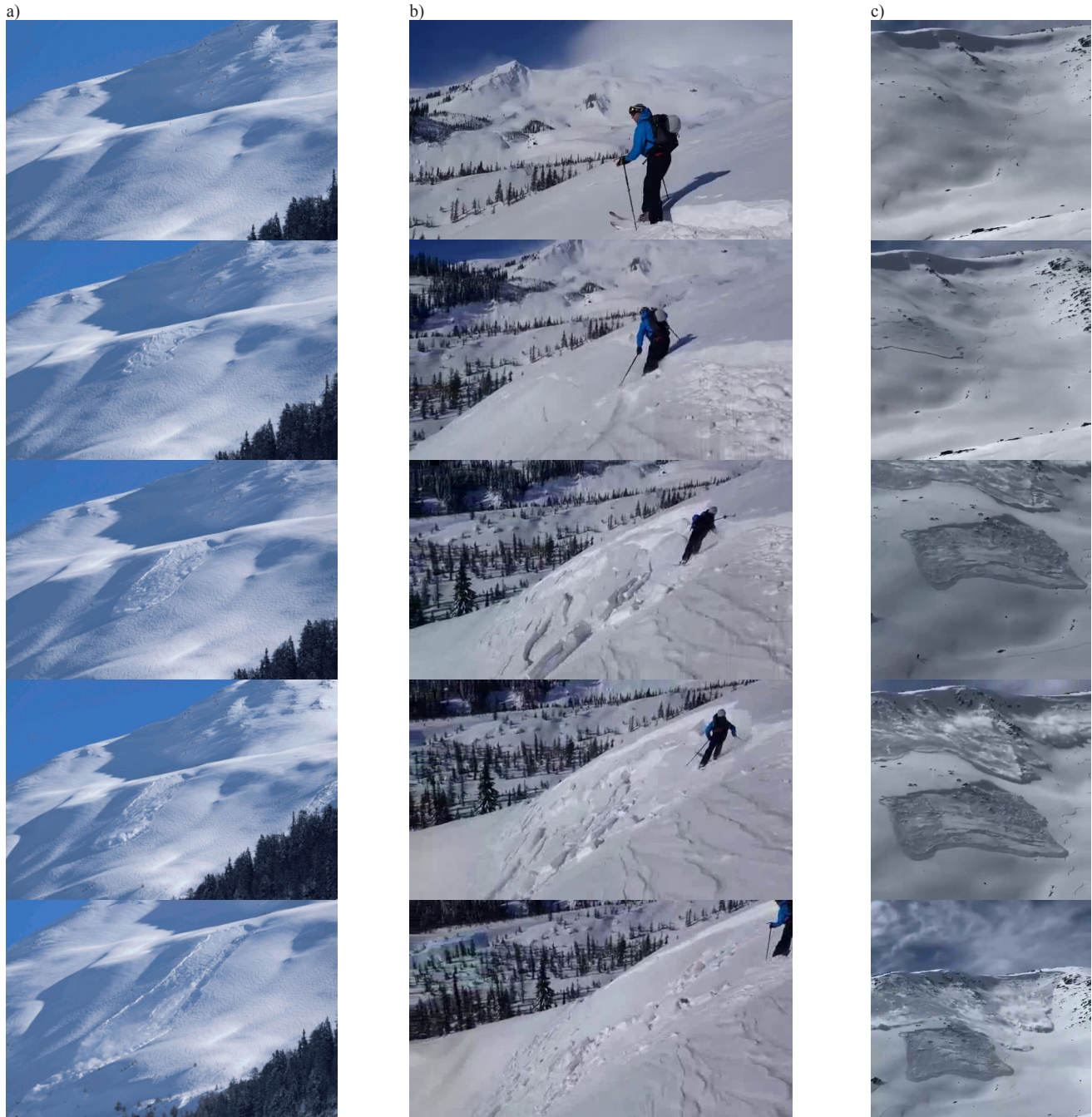


Figura 2 | Aludes de nieve. De arriba hacia abajo se muestra la formación y desarrollo de diferentes tipos de avalanchas de placa. Fuente: sif.ch (a), J.B. Lane (b) y luckydavewatson (c).

En la actualidad, existe un amplio uso del modelo RAMMS, desarrollado para la modelización de avalanchas de nieve con características específicas de los Alpes, tal como se desarrolló el AVAL1D (Oller et al., 2010), modelo precursor en 1D. La herramienta resuelve las ecuaciones de Saint Venant sobre una malla regular de cuadrados empleando un esquema de volúmenes

finitos centrado (Christen et al., 2010) y el modelo reológico de Voellmy-Salm (Salm, 1993; Voellmy, 1955) para el tratamiento de los términos de fricción (se detallan más adelante). Sin embargo, para detener la avalancha emplea un método basado en la cantidad de movimiento máxima desarrollada en el que, una vez alcanzado un porcentaje de éste, se impone la detención de la avalancha. Más recientemente, con la incorporación de la cohesión, se pueden imponer valores elevados de ésta para detener el movimiento de la avalancha (Bartelt et al., 2015). Christen et al. (2001) recomiendan el uso de parámetros de fricción obtenidos por calibración directa a partir de un número bien documentado de aludes de los Alpes suizos. No obstante, la aplicación del modelo en otras cordilleras requiere la re-calibración de los parámetros (Christen et al., 2002). Por ejemplo, Oller et al. (2010) concluyeron que los parámetros de fricción obtenidos en Suiza se ajustaban a aludes de periodo de retorno de 30 años en los Pirineos.

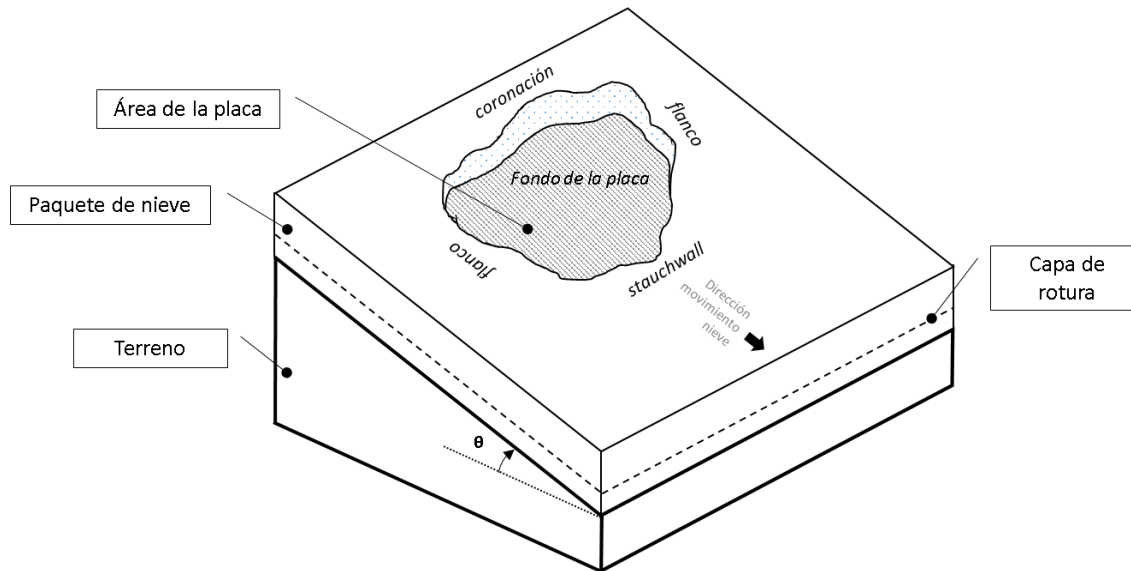


Figura 3 | Esquema de la formación de una avalancha de nieve tipo placa.

El presente documento tiene por objeto mostrar las posibilidades de las ecuaciones de Saint Venant para simular flujos de agua en estado sólido (avalanchas de nieve), empleando para ello un tratamiento numérico específico para resolver las ecuaciones que permite detener el fluido aun en ausencia de terreno plano. Para ello se ha empleado el modelo Iber (Bladé et al., 2014), un modelo hidráulico bidimensional que recientemente ha incorporado un módulo para la simulación de fluidos no-Newtonianos (Ruiz-Villanueva et al., 2019), y concretamente para avalanchas de nieve de placa-densa (Torralba et al., 2017). La herramienta se ha probado en dos casos de estudio para analizar el comportamiento del fluido en función de los parámetros de los modelos reológicos.

MÉTODOS

Modelización numérica de fluidos ambientales incompresibles

El movimiento de fluidos se describe mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, que provienen de la aplicación de la 2ª Ley de Newton. En un fluido en general, el problema puede reducirse a un sistema de 7 ecuaciones diferenciales parciales (Toro, 2009). Considerando fluido barotrópico, la parte mecánica y térmica puede separarse, siendo el problema mecánico el descrito por las Ecuaciones (1) y (2) en su forma compacta (los operados y variables en **negrita** se aplican en las tres direcciones del espacio):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2)$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidades ($\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$), μ es la viscosidad, ρ es la densidad del fluido, \mathbf{b} es el campo de fuerzas másicas y ∇p es el gradiente de presiones.

Para un fluido isotrópico e incompresible, el sistema se reduce a 4 ecuaciones y 4 incógnitas ($\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ y $p(\mathbf{x},t)$). Empleando la descomposición de Reynolds, se pueden tratar las fluctuaciones turbulentas descomponiendo el campo de velocidades como la suma de la velocidad media ($\bar{\mathbf{v}}$) y la velocidad instantánea (u'), siendo esta última resuelta a través de técnicas directas, como el *Direct Numerical Simulation* (DNS) (Orszag, 1970), o parciales, como la *Large Eddy Simulation* (LES) (Deardorff, 1970; Pitsch, 2006; Smagorinsky, 1963). Para evitar resolver las fluctuaciones turbulentas (u'), el modelo de *Reynolds-Averaged Navier-Stokes* (RANS) (Reynolds, 2006; Sagaut, 2001) introduce el concepto de viscosidad turbulenta (ν_T), que es resuelto por un modelo de turbulencia. En este caso, la Ecuación (2) puede reescribirse como:

$$-\nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{\mathbf{v}} + \rho \mathbf{b} + \rho \nu_T \Delta \bar{\mathbf{v}} = \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \quad (3)$$

Este sistema no tiene solución analítica, por lo que requiere de técnicas numéricas para su resolución. Asimismo, en función de la extensión del dominio, es necesario el uso de ordenadores para resolverlas de manera ágil y eficaz. La combinación de ambas aplicada a la dinámica de fluidos se denomina *Computational Fluid Dynamics* o CFD (Anderson, 1995), y proporciona un espacio de trabajo para estudiar la mecánica de fluidos alcanzando, en algunos casos, un mayor conocimiento cuando el análisis experimental no es factible.

Modelización numérica de fluidos someros no-Newtonianos

Los modelos numéricos bidimensionales (2D) de dinámica de fluidos en lámina libre resuelven las ecuaciones de Saint Venant en dos dimensiones que, aplicadas al agua, reciben comúnmente el nombre de ecuaciones en aguas poco profundas o 2D-SWE (*Shallow Water Equations*). Estas provienen de las ecuaciones de Reynolds descritas anteriormente, pero promediadas en la profundidad para convertir el problema tridimensional en bidimensional (Tan, 1992; Toro, 2009).

Las ecuaciones de Saint Venant son un sistema de 3 ecuaciones diferencial, en derivadas parciales, hiperbólico y no-lineal, que expresado en notación compacta resulta la Ecuación (4):

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F} = \mathbf{H} \quad (4)$$

donde \mathbf{U} (5) es el vector de variación temporal de variables del flujo de masa y cantidad de movimiento (h , calado; $h\mathbf{v}$, caudal específico expresado como producto de velocidad, \mathbf{v} , por calado, h), \mathbf{F} (6) es el tensor del flujo y \mathbf{H} (7) es el término fuente, que se expresan de la siguiente manera:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hv_x \\ hv_y \end{bmatrix} \quad (5) \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hv_x & hv_y \\ hv_x^2 + g\frac{h^2}{2} & hv_x v_y \\ hv_x v_y & hv_y^2 + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} \quad (6) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{o,x} - S_{f,x}) \\ gh(S_{o,y} - S_{f,y}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

En la parte de cantidad de movimiento del término fuente \mathbf{H} , sin considerar la componente turbulenta, se encuentran las fuerzas de gravedad (ghS_o) y de fricción (ghS_f). Las Ecuaciones (8) y (9) muestran una descripción de ambas componentes espaciales, siendo $|\mathbf{v}|$ el módulo de la velocidad ($|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$) y z_b la elevación del fondo, y un tratamiento del término de fricción según la fórmula de Manning:

$$S_{o,x} = -\frac{\delta z_b}{\delta x} \quad S_{o,y} = -\frac{\delta z_b}{\delta y} \quad (8)$$

$$\delta x = \frac{n^2 |\mathbf{v}| v_x}{h^{4/3}} \quad \delta y = \frac{n^2 |\mathbf{v}| v_y}{h^{4/3}} \quad (9)$$

En las ecuaciones anteriores se han descartado las tensiones efectivas, o términos turbulentos, que en caso de incluirse se deberían tratar a través de un modelo de turbulencia (Cea, 2005; Cea et al., 2007).

Bajo las hipótesis descritas anteriormente, y concretamente por el uso de la Ecuación (9), estas ecuaciones se limitan al agua. Sin embargo, existen multitud de fluidos ambientales no-Newtonianos que, en contraste con los Newtonianos, no presentan una respuesta lineal a la deformación cuando se le aplica una tensión de corte (p.ej. fluidos hiperconcentrados de sedimentos, lava, avalanchas de nieve, etc.), y por los que, además, los supuestos de fluido barotrópico e isotrópico pueden no ser adecuados. Incluso, en función de su naturaleza, podría ser necesario distinguir dos o tres fases fluidos-sólido para capturar adecuadamente su comportamiento (Ruiz-Villanueva et al., 2019).

Para la modelización numérica de la dinámica de fluidos no-Newtonianos en base a 2D-SWE es necesario asumir dos hipótesis adicionales:

- Fluido monofásico. El fluido se compone de una única fase considerando mezcla perfecta de todos sus componentes. No existen diferencias entra la fase sólida y líquida.
- Agrupamiento de las tensiones cortantes. Como consecuencia de la anterior, la tensión de corte podría considerarse como la suma de 5 componentes diferentes (Ecuación 10) que, descritas según Julien y León (2000), son:
 - Dispersiva (τ_d)
 - Turbulenta (τ_t)
 - Viscosa (τ_v)
 - Mohr-Coulomb (τ_{mc})
 - Cohesiva (τ_c)

$$\tau = \tau_d + \tau_t + \tau_v + \tau_{mc} + \tau_c \quad (10)$$

La descripción de tensiones anterior puede emplearse de manera general para la modelización numérica de fluidos no-Newtonianos utilizando el modelo reológico adecuado (Scheidl et al., 2013), sustituyendo los términos de fricción de la Ecuación (9) (S_f) por las tensiones debidas al modelo reológico (S_{rh}). Además, la distribución no-hidrostática de la presión se puede tener en cuenta con el coeficiente K_p en los términos de presión de la Ecuación (6), así como la incorporación de nuevo material por arrastre con un nuevo término fuente (E) en la ecuación de conservación de cantidad de masa (7). De este modo, el sistema de Ecuaciones (4) queda descrito de la siguiente manera:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hv_x \\ hv_y \end{bmatrix} \quad (11) \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} hv_x & hv_y \\ hv_x^2 + K_p g \frac{h^2}{2} & hv_x v_y \\ hv_x v_y & hv_y^2 + K_p g \frac{h^2}{2} \end{bmatrix} \quad (12) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} E \\ gh(S_{o,x} - S_{rh,x}) \\ gh(S_{o,y} - S_{rh,y}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Adaptando las 2D-SWE: modelos de fricción-cohesión

La reología es la ciencia encargada de estudiar la deformación y fluir de la materia bajo variaciones de temperatura, presión y tensión de corte (Adewale et al., 2017). Omitiendo los términos de temperatura y presión, el comportamiento del fluido es función solo de la tensión de corte (τ), que es proporcional a la tasa de deformación ($\dot{\gamma}$) por medio de la viscosidad (μ), que puede ser constante o dependiente de la tensión aplicada en el fluido. Bajo este punto de vista, los fluidos no-Newtonianos pueden clasificarse en 4 grandes grupos (Figura 4): Newtonianos, caso particular de fluidos no-Newtoniano para los que la viscosidad es constante (p.ej. agua); Dilatantes, la viscosidad se incrementa cuando la tensión de corte aumenta (p.ej. maicena con agua); Pseudoplástico, la viscosidad se reduce cuando la tensión de corte aumenta (p.ej. ketchup); Bingham, es necesario superar una cierta tensión para iniciar el movimiento y, una vez superada, el fluido puede regirse por un comportamiento Newtoniano (Plástico de Bingham) o Pseudoplástico (p.ej. pintura).

Las avalanchas de nieve pueden tratarse como un fluido no-Newtoniano. Para la modelización de avalanchas de nieve son ampliamente aceptados los modelos de fricción de Voellmy-Salm y de Bingham (Christen et al., 2010; Dent y Lang, 1983; Keylock y Barbolini, 2011; Oller et al., 2010), ya que permiten tratar por separado los esfuerzos tensionales (Ancey, 2006). Recientemente, Bartelt et al. (2015) propusieron un modelo de cohesión para poder simular el efecto de esta propiedad de la nieve durante el desarrollo de una avalancha.

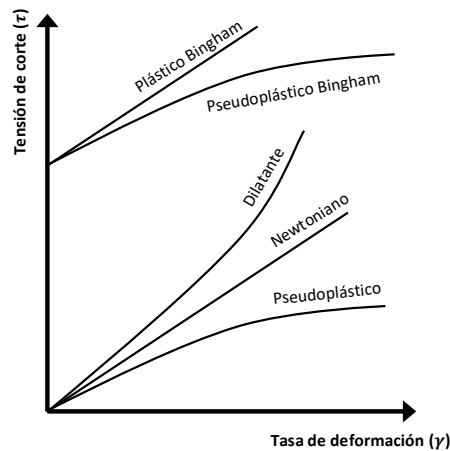


Figura 4 | Clasificación de fluidos no-Newtonianos en función de la tensión de corte (τ) y la tasa de deformación (γ).

En el presente trabajo se han empleado y analizado tres modelos de fricción y uno de cohesión, que expresados como pendiente de fricción (S_{rh}) serían:

- El modelo de fricción de Voellmy-Salm, Ecuación (14), asume que la resistencia del flujo se divide en una fricción de Coulomb en la fase sólida (μ) y una fricción turbulenta (ξ) en la fase en movimiento:

$$S_{rh} = \mu + \frac{v^2}{\xi h} \quad (14)$$

donde h es el espesor y v es la velocidad.

- El modelo de fricción de Bingham (Bingham, 1916), Ecuación (15), que se usa para caracterizar fluidos viscosos, contempla la tensión como suma de la tensión de fluencia (τ_y), necesaria para iniciar el movimiento (fase sólida), y la tensión viscosa (o turbulenta):

$$S_{rh} = 1.5 \frac{\tau_y}{\rho g h} + \frac{3\mu_B v}{\rho g h^2} \quad (15)$$

donde ρ es la densidad, g es la gravedad, μ_B es la viscosidad dinámica de Bingham, h es el espesor y v es la velocidad.

- El modelo de fricción para fluidos en régimen turbulento, Ecuación (16), para el que usualmente se emplea la ecuación de Manning (Hungry, 1995; Naef et al., 2006), combina la tensión turbulenta y dispersiva:

$$S_{rh} = \frac{n^2 v^2}{h^{4/3}} \quad (16)$$

donde n es el coeficiente de Manning, h es el espesor y v es la velocidad.

- El modelo de cohesión de Bartelt et al. (2015), que tiene en cuenta la contribución de la fricción sólida, su variación con la tensión normal y la propia cohesión del fluido:

$$S_{rh} = \frac{1}{\rho g h} C (1 - \mu) \left(1 - e^{-\frac{\rho g h}{C}} \right) \quad (17)$$

donde C es la cohesión, μ coeficiente de fricción sólida, h es el espesor, ρ es la densidad y g es la gravedad.

Así pues, el término de fuente S_{rh} puede expresarse como la suma de tres parámetros: i) la fricción turbulenta, que está asociada a la disipación de energía por el movimiento del fluido; ii) la fricción sólida, resistencia similar a la fricción de Coulomb de la fase sólida; y iii) la cohesión, propiedad intrínseca al fluido, que puede tratarse como una resistencia a fluir ya que tiende a mantener unidas las partículas.

Adaptando las 2D-SWE: esquema numérico

Lo descrito en los apartados anteriores es común para la modelización numérica de fluidos no-Newtonianos en 2D. Sin embargo, el tratamiento del término fuente \mathbf{H} , Ecuación (13), que incorpora el modelo reológico, depende del método numérico (diferencias finitas, elementos finitos o volúmenes finitos) y del esquema numérico empleado (centrado o descentrado). Este tratamiento debe estar enfocado hacia un correcto balance entre éste y el vector de flujo \mathbf{F} , Ecuación (12) (Bladé y Gómez-Valentín, 2006).

El presente trabajo muestra la integración y aplicación de los modelos de fricción-cohesión descritos anteriormente en Iber. Esta herramienta de simulación hidráulica utiliza el método de volúmenes finitos (MVF), un esquema descentrado de primer orden tipo Godunov, concretamente el de Roe (1986), para el flujo convectivo, y un esquema centrado para el resto términos fuente (Bladé et al., 2014). Así pues, el equilibrio entre el término fuente y el vector de flujo debe producirse en la parte que representa la pendiente de fondo, evitando las oscilaciones espurias de la lámina libre cuando se trabaja en geometrías complejas (Bermúdez et al., 1998). El término fuente puede descomponerse como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 \quad (18)$$

siendo,

$$\mathbf{H}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_{o,x} \\ ghS_{o,y} \end{bmatrix} \quad (19) \quad \mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghS_{rh,x} \\ -ghS_{rh,y} \end{bmatrix} \quad (20)$$

por lo tanto, el esquema numérico en dos dimensiones puede expresarse como:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n - \frac{\Delta t}{V_i} \left[\sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} + \sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{H}_{i,w_l}^{*1}) \right] + \Delta t \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (21)$$

donde $\mathbf{q} = h\mathbf{v}$, \mathbf{n}_{i,w_l} es la componente normal exterior del contorno w_l del elemento, l_{i,w_l} es la longitud de dicho contorno (w_l), N_i es el número de contornos del elemento, \mathbf{F}^* y \mathbf{H}^* es el flujo y el término de pendiente de fondo numérico a través de los contornos del elemento, respectivamente. Una descripción detallada del esquema puede hallarse en (Bladé y Gómez-Valentín, 2006).

Se ha empleado un esquema numérico descentrado de los términos de fricción sólida y cohesión, similar al empleado para el tratamiento de la pendiente de fondo. Este esquema puede asimilarse a la introducción de un escalón que permite decelerar el flujo (Figura 5). Así pues, los términos de \mathbf{H}^{*1} se pueden tratar de forma independiente, resultando la Ecuación (21) como:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n - \frac{\Delta t}{V_i} \left[\sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{F}_{i,w_l}^* \mathbf{n}_{i,w_l}) l_{i,w_l} + \sum_{l=1}^{N_i} (\mathbf{H}_{i,w_l}^{*1}) + \mathbf{H}_{i,w_l}^{*2} \right] + \Delta t \mathbf{H}_i^{2,n} \quad (22)$$

donde el término \mathbf{H}_{i,w_l}^{*2} incluye la fricción sólida y la cohesión, y se discretiza de forma centrada.

En un esquema de Roe, la descomposición de la integral de los vectores de flujo se realiza mediante los autovectores de la matriz jacobiana. Para poder integrarlo, es necesario considerar los términos fuente en la arista de dos elementos contiguos (i y j). De este modo, \mathbf{H}_{i,w_l}^{*1} puede expresarse como:

$$\mathbf{H}_{i,w_l}^{*1} = \frac{1}{2} l_{i,w_l} \left(\sum_{k=1}^3 \tilde{\beta}_k (1 - \text{sign}(\tilde{\lambda}_k) \tilde{e}_k) \right)_{i,j} \quad (23)$$

donde $\tilde{\lambda}_k$ son los autovalores y \tilde{e}_k son los autovectores en el contorno, linealmente independientes, y que se expresan como:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{v}_x n_x + v_y n_y + \tilde{c} \\ \tilde{\lambda}_1 &= \tilde{v}_x n_x + v_y n_y \quad (24) \quad \tilde{e}_1 = \tilde{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{v}_x \pm \tilde{c} n_x \\ \tilde{v}_x \pm \tilde{c} n_y \end{bmatrix} \quad (25) \quad \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c} n_y \\ \tilde{c} n_x \end{bmatrix} \quad (26) \\ \tilde{\lambda}_3 &= \tilde{v}_x n_x + v_y n_y - \tilde{c} \end{aligned}$$

siendo n_x y n_y la componente normal exterior a un contorno en la dirección x e y respectivamente, C es la celeridad y v_x y v_y la velocidad en la dirección x e y respectivamente. La variables resaltadas con $\tilde{}$ hacen referencia al contorno del volumen finito.

Partiendo de la definición descrita en la Ecuación (18), los coeficientes $\tilde{\beta}_k$ se obtienen como:

$$\tilde{\beta}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{v}_x + \tilde{c} n_x \\ \tilde{v}_x + \tilde{c} n_y \end{bmatrix} + \tilde{\beta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c} n_y \\ \tilde{c} n_x \end{bmatrix} + \tilde{\beta}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{v}_x - \tilde{c} n_x \\ \tilde{v}_x - \tilde{c} n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\tilde{c}(\Delta z)_{i,j} n_x \\ -g\tilde{c}(\Delta z)_{i,j} n_y \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde $(\Delta z)_{i,j}$ es la diferencia de cotas entre el elemento i y el j , siendo $\tilde{\beta}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= -\frac{\tilde{c}}{2}(\Delta z)_{i,j} \\ \tilde{\beta}_2 &= 0 \\ \tilde{\beta}_3 &= \frac{\tilde{c}}{2}(\Delta z)_{i,j} \end{aligned} \quad (28)$$

Conceptualmente esta metodología, que integra los términos de fricción sólida y cohesión como parte de los términos de pendiente de fondo mediante un esquema descentrado, se puede interpretar como una diferencia de cotas adicional $(\Delta z_{(\mu+C)})$. Ésta se incorpora en el término de pendiente de fondo, como una «fricción de escalón», de la siguiente manera:

$$\Delta z = \Delta z_{\text{terreno}} + \Delta z_{(\mu+C)} \quad (29)$$

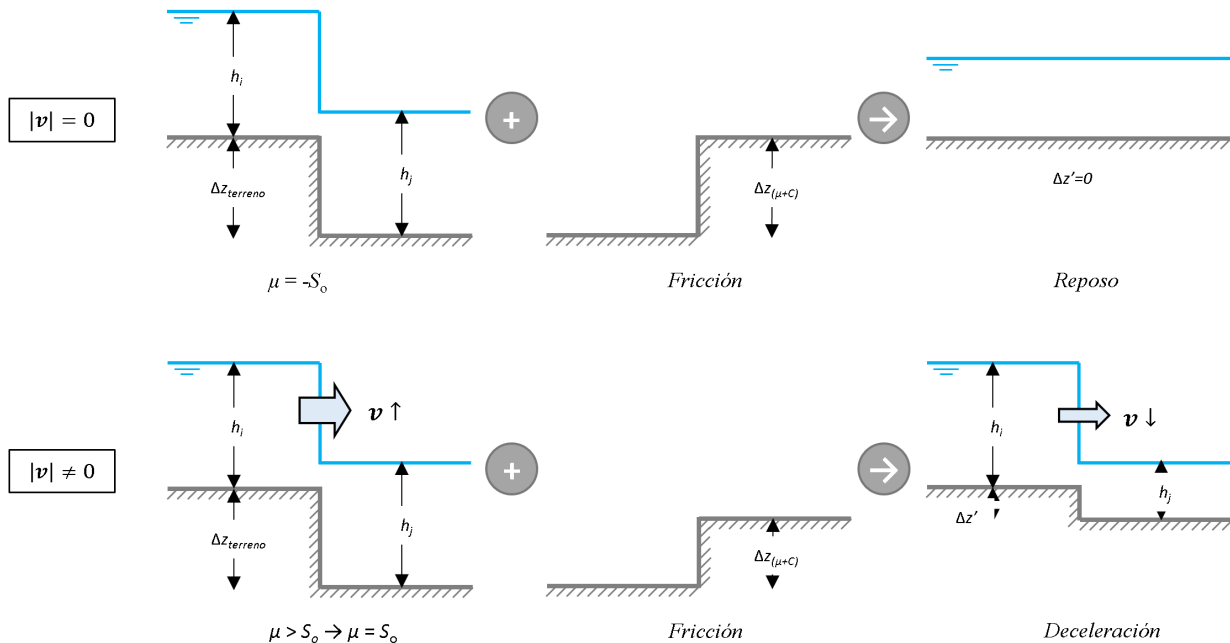


Figura 5 | Representación esquemática del tratamiento de los términos de fricción sólida y cohesión $(\Delta z_{(\mu+C)})$ en el término de pendiente de fondo (Δz) . Fuente: adaptado de Torralba-Conill (2017).

De este modo, se consigue detener el movimiento del fluido y definir la superficie de la lámina libre en concordancia con el tipo de fluido (p.ej. posición no horizontal en reposo). Existen dos posibles escenarios (Figura 5):

- $|v| \neq 0$, el escalón $\Delta z_{(\mu+C)}$ actúa contra el movimiento del fluido
- $|v| = 0$, el escalón $\Delta z_{(\mu+C)}$ actúa contra la pendiente de fondo

MATERIALES

Como parte de los trabajos de validación del módulo de avalanchas de nieve de Iber, se analizó el comportamiento de los parámetros de los modelos reológicos implementados (Caso 1) y se verificó la robustez del esquema numérico para tratar los esfuerzos de fricción y cohesión, junto con el comportamiento bidimensional del modelo (Caso 2). Los rangos de variación de los parámetros se han definido en base a las guías y bibliografía existente (Bartelt et al., 2017, 2015, 1999; Beguería et al., 2009; Blagovechshenskiy et al., 2002; Fischer et al., 2015; Gruber y Bartelt, 2007; Maggioni et al., 2013; Oller et al., 2010).

Caso 1: influencia de los parámetros del modelo reológico

El experimento numérico consistió en un canal de 225×15 m con dos pendientes (1:0.75 en 125 m y 1:0.02 en 100 m) y un volumen inicial de 25 m^3 situado en la parte alta, en el tercio central del canal de mayor pendiente, en una superficie cuadrada de 5×5 m y a la misma distancia de los contornos. Se empleó una malla de cálculo regular de 0.5×0.5 m y un tiempo de simulación de 100 s.

Los parámetros analizados fueron la μ (0.1, 0.25 y 0.5) y la ζ (250, 800 y $2000 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$) y el término de cohesión C (0, 150 y 300 N/m^2) del modelo de fricción-cohesión de Voellmy-Salm y Bartelt; la tensión de fluencia τ_y (0, 5, 25, 50, 250, 750, 2000 N/m^2) y la viscosidad μ_B (0, 5, 25, 50, 250, 750, 2000 Ns/m^2) para el modelo de Bingham; y valores de 0.015 a $1 \text{ s/m}^{1/3}$ del coeficiente de Manning. Todo ello para una densidad de 300 kg/m^3 y sin considerar la incorporación de nuevo material.

Caso 2: rotura de presa asimétrica

Se tomó uno de los casos de rotura de presa asimétrica descritos por Chaudhry (2008), y que consiste en dos recintos horizontales de 95×200 m unidos de manera asimétrica por un tramo, también horizontal, de 75 m de longitud. Se empleó una malla regular de 5×5 m, sin considerar fricción en los contornos y con un tiempo de simulación de 25 s.

El objetivo de este caso fue analizar el comportamiento 2D de los distintos modelos reológicos. La configuración de los parámetros de los modelos reológicos evaluados fue: Voellmy-Salm y cohesión, $\mu = 0.25$, $\zeta = 1000 \text{ m/s}^2$ y $C = 100 \text{ N/m}^2$; Bingham, $\tau_y = 500 \text{ N/m}^2$ y $\mu_B = 500 \text{ Ns/m}^2$; y coeficiente de Manning de $1 \text{ s/m}^{1/3}$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados de las simulaciones del Caso 1 muestran grandes diferencias en la velocidad de propagación del frente, la extensión de la avalancha (en ancho) y la distancia recorrida en la zona de deposición (tramo con pendiente 1:0.02). En la Figura 6 se muestra, a modo de ejemplo, el comportamiento de la avalancha usando diferentes parámetros de los modelos reológicos descritos anteriormente para una simulación de 100 s. De forma general, el modelo de Manning no se detuvo, independientemente del coeficiente empleado. Para los parámetros empleados, el modelo de Voellmy siempre se detuvo, siendo la distancia recorrida en el segundo tramo función de μ y de la cohesión, llegando incluso a no alcanzar el cambio de pendiente para μ y cohesiones elevadas. En el modelo de Bingham, para viscosidades reducidas, la distancia recorrida fue mayor y se obtuvo un mayor esparcimiento de la avalancha a lo largo del canal.

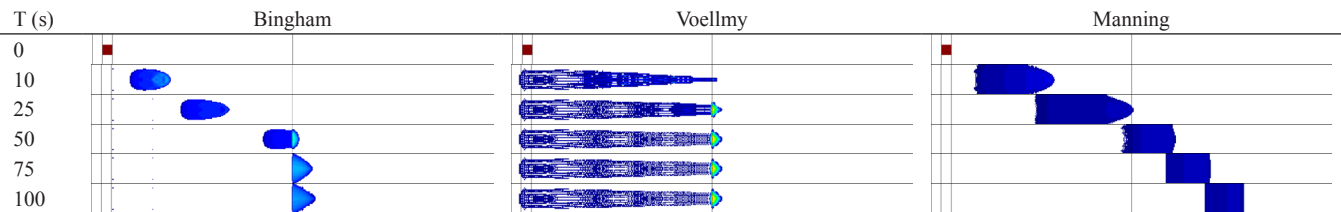


Figura 6 | Caso 1. Evolución de la avalancha en un canal con dos pendientes diferentes (1:0.75 en 125 m y 1:0.02 en 100 m) para los modelos de Bingham ($\tau_y = 25 \text{ N/m}^2$ y $\mu_B = 25 \text{ Ns/m}^2$), Voellmy ($\mu = 0.1$, $\xi = 2000 \text{ m/s}^2$ y $C = 150 \text{ N/m}^2$) y Manning ($n = 0.05 \text{ s/m}^{1/3}$). Representación del mapa de espesores en escala de colores (1 m: color granate; 0 m: color azul).

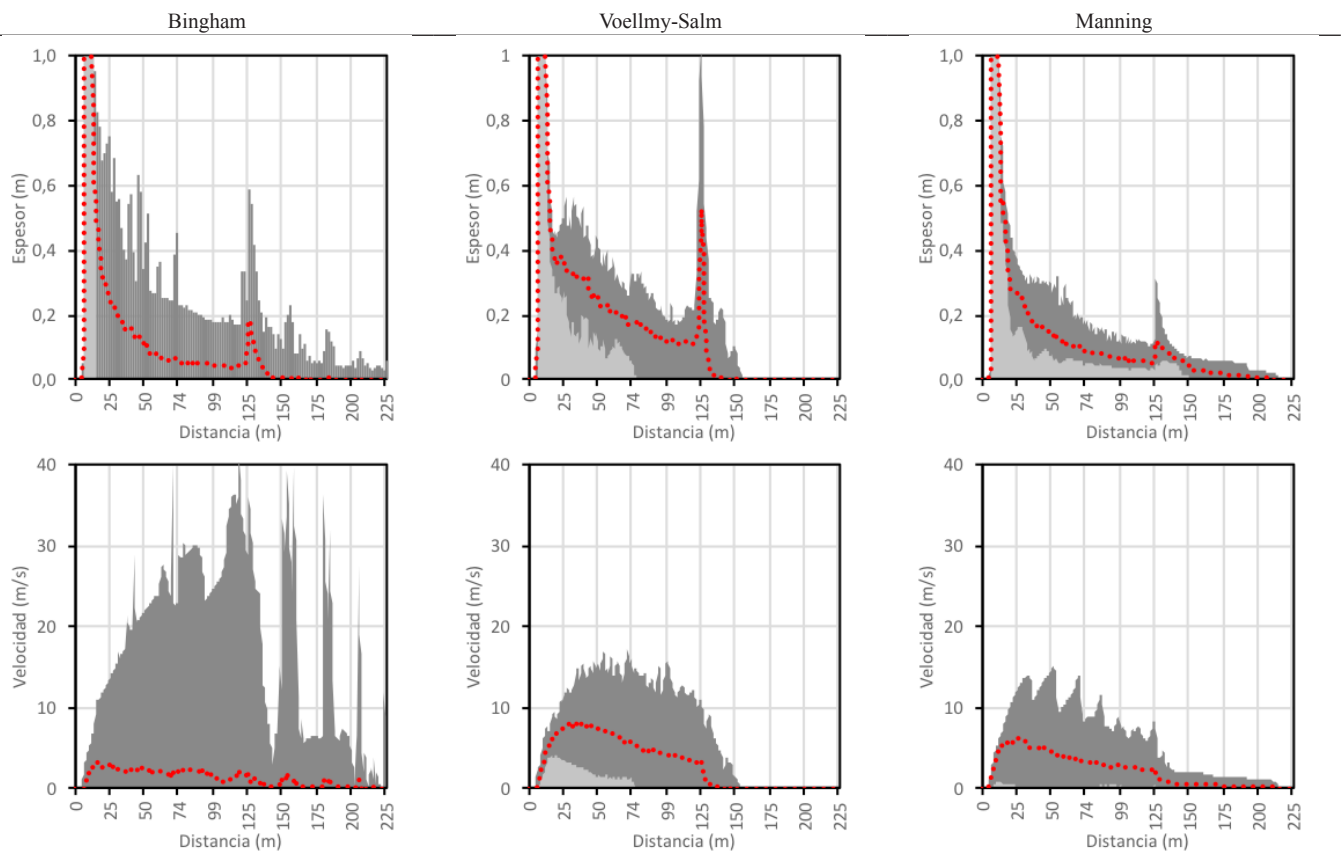


Figura 7 | Caso 1. Comportamiento de los modelos de Bingham, Voellmy y Manning. Envoltura de espesores y velocidades en el eje central del canal. Valores mínimos (gris claro), máximos (gris oscuro) y valores medios (línea roja discontinua) alcanzados a lo largo de la simulación (100 s).

La Figura 7 muestra la envoltura de espesores mínimo (gris claro) y máximos (gris oscuro) desarrollados a lo largo del eje central del canal para cada modelo reológico evaluado. Se observó que el modelo de Voellmy presenta, en general, mayores acumulaciones en la zona de deposición (entorno a los 125 m), llegando en algunos casos a ser ligeramente superiores a 1 m de manera puntual (efecto perfectamente asumible en aludes). Por el contrario, el modelo de Manning no presentó dichas acumulaciones puesto que la avalancha siguió fluyendo, mientras que el modelo de Bingham mostró acumulaciones para tensiones de fluencia bajas y viscosidades elevadas. En cuanto a las velocidades máximas observadas, el modelo de Bingham mostró valores cercanos a 40 m/s justo antes de la zona de cambio de pendiente. Las velocidades para los modelos simulados con Voellmy y Manning presentaron velocidades máximas más moderadas (entre 5 y 18 m/s), siendo el modelo de Voellmy el que desarrolló una velocidad más estable durante los primeros metros.

Para la rotura de presa asimétrica (Caso 2), la Figura 8 muestra a modo de ejemplo la superficie libre obtenida por los distintos modelos reológicos en el instante 8 s (Bingham: $\tau_y = 500 \text{ N/m}^2$ y $\mu_B = 500 \text{ Ns/m}^2$; Voellmy: $\mu = 0.25$, $\xi = 1000 \text{ m/s}^2$ y

$C = 100 \text{ N/m}^2$; Manning: $n = 0.05 \text{ s/m}^{1/3}$). El modelo de Voellmy alcanzó la situación de equilibrio durante la simulación (13 s), mientras que en el resto de modelos el fluido siguió fluyendo hasta el final de la simulación (25 s). La velocidad máxima del frente fue de 3.36 m/s (Voellmy y Manning) y 4.36 m/s (Bingham). Para reproducir un fluido no-Newtoniano con el modelo de Manning es necesario utilizar valores del coeficiente de Manning fuera de los descritos en la literatura, incluso podría ser necesario imponer un coeficiente de Manning variable en función del espesor o la velocidad como sucede en ríos vegetados (Sanz-Ramos et al., 2018). En todos los modelos se alcanza una solución numéricamente estable y bidimensional.

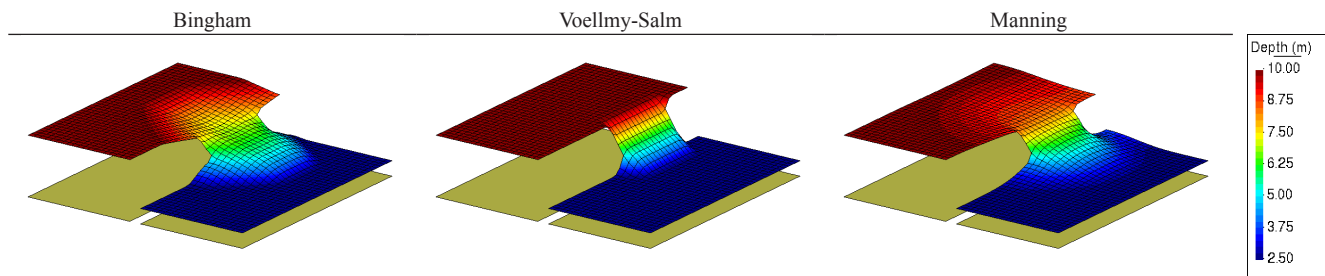


Figura 8 | Caso 2. Representación tridimensional de la superficie libre en el instante 8 s para los modelos de Bingham ($\tau_y = 500 \text{ N/m}^2$ y $\mu_B = 500 \text{ Ns/m}^2$), Voellmy ($\mu = 0.25$, $\xi = 1000 \text{ m/s}^2$ y $C = 100 \text{ N/m}^2$) y Manning ($n = 0.5 \text{ s/m}^{1/3}$).

CONCLUSIONES

Las ecuaciones de Saint Venant pueden ser una aproximación adecuada para la modelización de fluidos no-Newtonianos, como por ejemplo las avalanchas de nieve, siempre que se adapten convenientemente. Para modelos numéricos basados en las 2D-SWE se puede afirmar que:

1. Los supuestos de fluido barotrópico e isotrópico pueden no ser adecuados, sobre todo cuando el fluido está compuesto por dos o tres fases fluidos-sólido.
2. La hipótesis de distribución hidrostática de presiones puede no ser adecuada, por lo que resulta necesario modificar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (coeficiente K_p en los términos de presión de la Ecuación (12)).
3. La descripción del movimiento debe realizarse empleando un modelo reológico, que para el caso de avalanchas de nieve son generalmente los modelos de fricción de Voellmy-Salm o de Bingham. Asimismo, también puede considerarse el efecto de la cohesión mediante un modelo de cohesión que, evaluado conjuntamente, funcionaría como un modelo de fricción-cohesión. El modelo reológico debe incorporarse en los términos de fricción del término fuente de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.
4. El esquema numérico debe conseguir el equilibrio entre el término fuente y el vector de flujo para evitar oscilaciones espurias y movimientos no reales de la solución numérica.

Para el desarrollo de una herramienta numérica para la simulación de avalanchas de nieve de placa-densa en base a Iber, se asume que el fluido es isotrópico (1) y la distribución de presiones puede variar (2) para tener en cuenta la composición del fluido (1). Se han incorporado los modelos de fricción de Voellmy-Salm y Bingham (3), así como la posibilidad de emplear un modelo de fricción clásico para agua (Manning) o un modelo de cohesión conjuntamente con el modelo de fricción de Voellmy-Salm. Se ha adaptado el esquema numérico separando el término fuente de la ecuación de cantidad de movimiento en dos (4), incluyendo en la pendiente de fondo los términos de fricción sólida y cohesión del modelo reológico. Esto permite detener el movimiento del fluido en base a las propiedades del fluido, siendo numéricamente estable y físicamente consistente.

Las comparaciones realizadas en los casos de estudio muestran que las diferencias en los resultados, tanto entre los diferentes modelos como con distintos parámetros usando el mismo modelo, se pueden atribuir a la construcción conceptual de cada una de las formulaciones empleadas. El modelo de Manning no parece ser adecuado para simular este tipo de fluidos ya que repite

patrones propios de fluidos newtonianos en estado turbulento (suavidad en la descripción del movimiento). El modelo de Bingham está altamente influenciado por la viscosidad dinámica (μ_B), ya que a mayores valores de ésta se obtienen velocidades menores y espesores muy similares. Por último, el modelo de fricción-cohesión de Voellmy-Salm muestra que la cohesión juega un papel fundamental, sobre todo a la hora de retener el movimiento del flujo para espesores bajos (colas de avalancha más extensas). Como era de esperar, una mayor pendiente de fricción (μ) ejerce mayor resistencia a fluir, mientras que valores elevados de ζ (fricción turbulenta) implican la aceleración del flujo (la influencia de la velocidad en los términos resistentes es menor).

REFERENCIAS

- Adewale, F.J., Lucky, A.P., Oluwabunmi, A.P., Boluwaji, E.F. 2017. Selecting the most appropriate model for rheological characterization of synthetic based drilling mud. *Int. J. Appl. Eng. Res.*, 12, 7614-7629.
- Ancey, C. 2006. *Dynamique des avalanches*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne (Suisse).
- Ancey, C., Gervasoni, C., Meunier, M. 2004. Computing extreme avalanches. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 39, 161-180. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2004.04.004>
- Anderson, J.D. 1995. *Computational Fluid Dynamics: The basis with applications*, 6th Ed. ed. McGraw-Hill, Inc. London.
- Barbolini, M., Issler, D. 2006. Avalanche Test Sites and Research Equipment in Europe An Updated Overview. SATSIE Project Team. Accesible at http://satsie.ngi.no/docs/satsie_d08.pdf.
- Bartelt, P., Bühler, Y., Christen, M., Deubelbeiss, Y., Salz, M., Schneider, M., Schumacher, L. 2017. *RAMMS: Avalanche User Manual*. WSL Institute for Snow and Avalanche Research SLF.
- Bartelt, P., Salm, B., Gruber, U. 1999. Calculating dense-snow avalanche runout using a Voellmy-fluid model with active/passive longitudinal straining. *J. Glaciol.*, 45, 242-254. <https://doi.org/10.3189/S002214300000174X>
- Bartelt, P., Valero, C.V., Feistl, T., Christen, M., Bühler, Y., Buser, O. 2015. Modelling cohesion in snow avalanche flow. *J. Glaciol.*, 61, 837-850. <https://doi.org/10.3189/2015JoG14J126>
- Beguiría, S., W. J. Van Asch, T., Malet, J.P., Gröndahl, S. 2009. A GIS-based numerical model for simulating the kinematics of mud and debris flows over complex terrain. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 9, 1897-1909. <https://doi.org/10.5194/nhess-9-1897-2009>
- Bermúdez, A., Dervieux, A., Desideri, J.A., Vázquez, M.E. 1998. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 155, 49-72. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)85625-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)85625-3)
- Bingham, E.C. 1916. An investigation of the laws of plastic flow. *Bull. Bur. Stand.*, 13, 309-353. <https://doi.org/10.6028/bulletin.304>
- Bladé, E., Cea, L., Corestein, G., Escolano, E., Puertas, J., Vázquez-Cendón, E., Dolz, J., Coll, A. 2014. Iber: herramienta de simulación numérica del flujo en ríos. *Rev. Int. Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ing.*, 30, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.rimni.2012.07.004>
- Bladé, E., Gómez-Valentín, M. 2006. Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales. Análisis integrado en una y dos dimensiones. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. *Monografía CIMNE no 97*, Junio 2006.
- Blagovechshenskiy, V., Eglit, M., Naaim, M. 2002. The calibration of an avalanche mathematical model using field data. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 2, 217-220. <https://doi.org/10.5194/nhess-2-217-2002>
- Cea, L. 2005. An unstructured finite volume model for unsteady turbulent shallow water flow with wet-dry fronts: numerical solver and experimental validation. Tesis Dr. Universidad da Coruña.
- Cea, L., Puertas, J., Vázquez-Cendón, M.E. 2007. Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 14, 303-341. <https://doi.org/10.1007/s11831-007-9009-3>

- Chaudhry, M.H. 2008. *Open-channel flow: Second Edition, Open-Channel Flow: Second Edition*. Springer Science+Business Media, LLC. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-68648-6>
- Christen, M., Bartelt, P., Gruber, U. 2002. AVAL-1D: An avalanche dynamics program for the practice, in: *International Congress Interpraevent. Pacific Rim*, 14-18 October 2002, Matsumoto, Japan, pp. 715-725.
- Christen, M., Bartelt, P., Gruber, U., Issler, D. 2001. AVAL-1D - numerical calculations of dense flow and powder snow avalanches. Swiss Federal Institute for Snow and Avalanche Research, Davos, Switzerland. Technical report.
- Christen, M., Kowalski, J., Bartelt, P. 2010. RAMMS: Numerical simulation of dense snow avalanches in three-dimensional terrain. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 63, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2010.04.005>
- Deardorff, J.W. 1970. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 41, 453-480. <https://doi.org/10.1017/S0022112070000691>
- Dent, J.D., Lang, T.E. 1983. A biviscous modified Bingham model of snow avalanche motion. *Ann. Glaciol.*, 4, 42-46. <https://doi.org/10.3189/S0260305500005218>
- Fischer, J.T., Kofler, A., Fellin, W., Granig, M., Kleemayr, K. 2015. Multivariate parameter optimization for computational snow avalanche simulation. *J. Glaciol.*, 61, 875-888. <https://doi.org/10.3189/2015JoG14J168>
- Gaume, J., Van Herwijnen, A., Chambon, G., Wever, N., Schweizer, J. 2017. Snow fracture in relation to slab avalanche release: Critical state for the onset of crack propagation. *Cryosphere*, 11, 217-228. <https://doi.org/10.5194/tc-11-217-2017>
- Gruber, U., Bartelt, P. 2007. Snow avalanche hazard modelling of large areas using shallow water numerical methods and GIS. *Environ. Model. Softw.*, 22, 1472-1481. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2007.01.001>
- Hungr, O. 1995. A model for the runout analysis of rapid flow slides, debris flows, and avalanches. *Can. Geotech. J.*, 32, 610-623. <https://doi.org/10.1139/t95-063>
- Hungr, O., McDougall, S. 2009. Two numerical models for landslide dynamic analysis. *Comput. Geosci.* 35, 978-992. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2007.12.003>
- ICSI-IAHS, 1981. *Avalanche atlas; illustrated international avalanche classification. International Commission on Snow and Ice of the International Association of Hydrological Sciences*. UNESCO, Courvoisier SA, Paris, France.
- Issler, D., Harbitz, C.B., Kristensen, K., Lied, K., Moe, A.S., Barbolini, M., De Blasio, F. V., Khazaradze, G., McElwaine, J.N., Mears, A.I., Naaim, M., Sailer, R. 2005. A comparison of avalanche models with data from dry-snow avalanches at Ryggfonn, Norway. *Landslides Avalanches ICFL 2005 Norw.* 173-179.
- Julien, P.Y., León, C.A. 2000. Mudfloods, mudflows and debrisflows, classification in rheology and structural design, in: *Int. Workshop on the Debris Flow Disaster 27 November-1 December 1999*. pp. 1-15.
- Keylock, C.J., Barbolini, M. 2011. Snow avalanche impact pressure - vulnerability relations for use in risk assessment. *Can. Geotech. J.*, 38, 227-238. <https://doi.org/10.1139/t00-100>
- Maggioni, M., Bovet, E., Dreier, L., Buehler, Y., Godone, D., Bartelt, P., Freppaz, M., Chiaia, B., Segor, V. 2013. Influence of summer and winter surface topography on numerical avalanche simulations, in: *International Snow Science Workshop. ISSW 2013*. At: Grenoble Chamonix-Mont-Blanc, France, pp. 591-598.
- Naef, D., Rickenmann, D., Rutschmann, P., McArdell, B.W. 2006. Comparison of flow resistance relations for debris flows using a one-dimensional finite element simulation model. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 6, 155-165. <https://doi.org/10.5194/nhess-6-155-2006>
- Oller, P., Janeras, M., de Buen, H., Arnó, G., Christen, M., García, C., Martínez, P. 2010. Using AVAL-1D to simulate avalanches in the eastern Pyrenees. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 64, 190-198. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2010.08.011>
- Orszag, S.A. 1970. Analytical theories of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 41, 363-386. <https://doi.org/10.1017/S0022112070000642>

- Pitsch, H. 2006. Large-Eddy simulation turbulent combustion. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 38, 453-482. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092133>
- Reynolds, O. 2006. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. *Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 186, 123-164. <https://doi.org/10.1098/rsta.1895.0004>
- Roe, P.L. 1986. A basis for the upwind differencing of the two-dimensional unsteady Euler equations, in: Morton, K.W., Baines, M.J. (Eds.), *Numerical Methods for Fluid Dynamics II*. pp. 59-80.
- Ruiz-Villanueva, V., Mazzorana, B., Bladé, E., Bürkli, L., Iribarren-Anacona, P., Mao, L., Nakamura, F., Ravazzolo, D., Rickenmann, D., Sanz-Ramos, M., Stoffel, M., Wohl, E. 2019. Characterization of wood-laden flows in rivers. *Earth Surf. Process. Landforms*, 44, 1694-1709. <https://doi.org/10.1002/esp.4603>
- Sagaut, P. 2001. *Large Eddy Simulation for incompressible flows. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04416-2>
- Salm, B. 1993. Flow, flow transition and runout distances of flowing avalanches. *Ann. Glaciol.*, 18, 221-226. <https://doi.org/10.1017/S0260305500011551>
- Sanz-Ramos, M., Bladé, E., Niñerola, D., Palau-Ibars, A. 2018. Evaluación numérico-experimental del comportamiento histórico del coeficiente de rugosidad de los macrófitos. *Ing. del Agua*, 22, 109-124. <https://doi.org/10.4995/ia.2018.8880>
- Savage, S.B., Hutter, K. 1989. The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.*, 199, 177-215. <https://doi.org/10.1017/S0022112089000340>
- Scheidl, C., Rickenmann, D., Mc Ardell, B.W. 2013. Runout Prediction of Debris Flows and Similar Mass Movements, in: Margottini C., Canuti P., Sassa K. (Eds) *Landslide Science and Practice*. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31310-3_30
- Schweizer, J., Jamieson, J.B., Schneebeli, M. 2003. Snow avalanche formation. *Rev. Geophys.* 41. <https://doi.org/10.1029/2002RG000123>
- Smagorinsky, J. 1963. General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weather Rev.*, 91, 99-164. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091%3C0099:GCEWTP%3E2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091%3C0099:GCEWTP%3E2.3.CO;2)
- Tan, W.Y. 1992. *Shallow Water Hydrodynamics*, first Edit. ed. Elsevier Science.
- Thibert, E., Bellot, H., Ravanat, X., Ousset, F., Pulfer, G., Naaim, M., Hagenmuller, P., Naaim-Bouvet, F., Faug, T., Nishimura, K., Ito, Y., Baroudi, D., Prokop, A., Schön, P., Soruco, A., Vincent, C., Limam, A., Héno, R. 2015. The full-scale avalanche test-site at Lautaret Pass (French Alps). *Cold Reg. Sci. Technol.*, 115, 30-41. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2015.03.005>
- Toro, E.F. 2009. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin (Heidelberg). <https://doi.org/10.1007/b79761>
- Torralba-Conill, A. 2017. *Implementation of a two-dimensional model for simulating Snow Avalanches*. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Torralba, A., Bladé, E., Oller, P. 2017. Implementació d'un model bidimensional per a simulació d'allaus de neu densa, in: *V Jornades Tècniques de Neu i Allaus: Pyrenean Symposium on Snow and Avalanches*. Ordino, Andorra.
- Voellmy, A. 1955. Über die Zerstörungskraft von Lawinen. *Schweizerische Bauzeitung* 73, 15. <http://doi.org/10.5169/seals-61891>
- Wever, N., Vera Valero, C., Techel, F. 2018. Coupled Snow Cover and Avalanche Dynamics Simulations to Evaluate Wet Snow Avalanche Activity. *J. Geophys. Res. Earth Surf.*, 123, 1772-1796. <https://doi.org/10.1029/2017JF004515>